Kertaustehtävät

1. c) Levyn kiertokulma on $\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}15\ \text{rad/s}^2 \cdot (16\ \text{s})^2 \approx 19\ \text{rad}.$

2. a) Ratanopeus on $v = \omega r = 15\frac{1}{\text{s}} \cdot 0{,}035\,\text{m} \approx 53\,\text{cm/s}.$

3. b) Tasapainoasemassa palloon kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja langan jännitysvoima $\overline{T}$. Pallon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T - G = m\frac{v^2}{r}$. Langan jännitysvoiman suuruus on

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg = 0{,}065\,\text{kg} \cdot \frac{(4{,}7\,\text{m/s})^2}{0{,}34\,\text{m}} + 0{,}065\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 4{,}9\,\text{N}.$$

4. c) Saranoihin vaikuttava momentti on molemmissa tapauksissa yhtä suuri.
Yhtälöstä $M_2 = M_1$ eli $F_2 r_2 = F_1 r_1$ saadaan työntövoiman suuruudeksi

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{87\,\text{N} \cdot 1{,}30\,\text{m}}{0{,}30\ \text{m}} \approx 380\ \text{N}.$$

5. c) Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla minkä tahansa akselin suhteen. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa pisteen A suhteen on $\sum M_A = F_1 r_1 - F_2 r_2 = 0$. Etuhampaiden puristusvoiman suuruus on

$$F_2 = \frac{F_1 r_1}{r_2} = \frac{720\,\text{N} \cdot 30\,\text{mm}}{120\,\text{mm}} = 180\,\text{N}.$$

6. b) Tyhjän tölkin painopiste on korkeudella $\frac{11\,\text{cm}}{2} = 5{,}5\,\text{cm}$. Pohjalla olevan juoman korkeus saadaan yhtälöstä $\pi r^2 h = V$.

Nestepinta on korkeudella

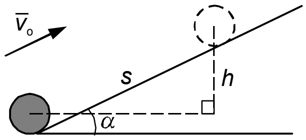
$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{100\,\text{cm}^3}{\pi(3{,}5\,\text{cm})^2} \approx 2{,}598448\,\text{cm}.$$

Oletetaan, että juoman tiheys on yhtä suuri kuin veden tiheys 1,0 kg/dm^3. Silloin juoman massa on 100 g ja sen painopiste on korkeudella $\frac{2{,}598448\,\text{cm}}{2} = 1{,}299224\,\text{cm}.$

Koko systeemin painopiste pöydänpinnan suhteen on korkeudella

$$y_0 = \frac{15\,\mathrm{g} \cdot 5{,}5\,\mathrm{cm} + 100\,\mathrm{g} \cdot 1{,}299224\,\mathrm{cm}}{115\,\mathrm{g}} \approx 1{,}8\,\mathrm{cm}.$$

7. c)



Kitkamomentin tekemä työ muuntaa pyörimisen rotaatioenergian potentiaalienergiaksi ja sylinteriin kohdistuva painon tekemä työ etenemisen translaatioenergian potentiaalienergiaksi, kun vieriminen tapahtuu liukumatta. Kitka on lepokitkaa. Oletetaan, että liikevastuksia ei ole. Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J\omega_0^2 = mgh.$$

Nousukorkeus on $h = s \cdot \sin\alpha,$ jossa s on vierimismatka. Sijoitetaan mekaanisen energian säilymislain yhtälöön kulmanopeuden ja hitausmomentin yhtälöt $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$ ja $J = \frac{1}{2}mr^2$ ja ratkaistaan alkunopeus:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \frac{1}{4}v_0^2 = gh$$

$$\frac{3}{4}v_0^2 = gh$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin\alpha} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} \cdot \sin 25°} \approx 2{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

8. b) Radallaan olevan satelliitin liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_\mathrm{n}$. Kun suunta kohti Maan keskipistettä on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $\gamma\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$, jossa M on Maan massa, m satelliitin massa ja v ratanopeus. Satelliitin ratanopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{750\,\mathrm{km} + 6378\,\mathrm{km}}} \approx 7{,}5\,\mathrm{km/s}.$$

9. c) Kiven nopeus ajan funktiona on $v = v_0 - gt.$ Lakipisteessä nopeus on v = 0 m/s, jolloin nousuaika on $t = \frac{v_0}{g} = \frac{20\,\mathrm{m/s}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 2{,}0$ s.

10. c) Alkunopeuden pystykomponentti on

$$v_{oy} = v_0 \sin 36° = 27\,\mathrm{m/s} \cdot \sin 36° \approx 15{,}87020\,\mathrm{m/s}.$$

Lakipisteessä kappaleen nopeuden pystykomponentti $v_y = 0$. Yhtälöstä $v_y = v_{0y} - gt = 0$ nousuaika on $t = \dfrac{v_{0y}}{g} = \dfrac{15{,}87020\,\mathrm{m/s}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 1{,}61776\,\mathrm{s}$. Lentoaika on 2· 1,61776 s ≈ 3,2 s.

11.a) Kiertokulma on $175° = 175 \cdot \dfrac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \approx 3{,}1\,\mathrm{rad}$.

b) Kiertokulma on $15\,\mathrm{rad} = 15 \cdot \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 860^\circ$.

12. a) Pulsarin kierrosaika on $T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{642\,1/\mathrm{s}} \approx 1{,}56$ ms.

Kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 642\ \dfrac{1}{\mathrm{s}} \approx 4030 \dfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

13. a) Napakelkan ratanopeus on $v = \dfrac{2\pi r}{T}$, josta kelkan kierrosaika on

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4{,}5\ \mathrm{m}}{2{,}5\ \mathrm{m/s}} = 11{,}30973\ \mathrm{s} \approx 11\ \mathrm{s}.$$

b) Pyörimisnopeus on $n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{11{,}30973\,\mathrm{s}} \approx 0{,}088 \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$.

c) Newtonin I lain mukaan kelkka jatkaa suoraviivaisesti liikettään radan tangentin suuntaan.

14. a) Pyörän säde on r = 4,25 cm, joten sen pyörähtäessä yhden kierroksen hiihtäjä etenee matkan $s = 2\pi r$. Lenkin aikana kierroksia tulee $\dfrac{10\,000\,\mathrm{m}}{2\pi \cdot 0{,}0425\,\mathrm{m}} \approx 37\,000$.

b) Renkaan kulmanopeus on $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 2{,}5\,\mathrm{rad/s} = 5\pi\,\mathrm{rad/s} \approx 15{,}7\,\mathrm{rad/s}$.

Kiertokulma on $\varphi = \omega t = 5\pi\,\mathrm{rad/s} \cdot 6 \cdot 60\,\mathrm{s} \approx 5654{,}86678\,\mathrm{rad}$.

Pyöräilijän kuudessa minuutissa pyöräilemä matka on

$$s = \varphi r = 5654{,}86678\,\mathrm{rad} \cdot 0{,}34\,\mathrm{m} \approx 1{,}9\,\mathrm{km}.$$

Rengas pyörähtää kokonaisia kierroksia $\dfrac{5654{,}86678\ \mathrm{rad}}{2\pi} \approx 900$ kpl.

15. a) Koska kiekot on yhdistetty luistamattomalla hihnalla toisiinsa, niiden ratanopeudet ovat yhtä suuret: $v_1 = v_2$ eli $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, josta saadaan $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Koska säteiden suhde on $\frac{r_1}{r_2} = \frac{8,0\,\text{cm}}{20\,\text{cm}} = \frac{2}{5}$, kulmanopeuksien suhde on 5:2 (= 2,5:1).

b) Kun pienemmän kiekon pyörimisnopeus on 5,0 r/s, sen kulmanopeus on

$$\omega_1 = 2\pi n = 2\pi \cdot 5,0\,\text{rad/s} \approx 31,41593\,\text{rad/s}.$$

Isomman kiekon kulmanopeus on

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{2}{5} \cdot 31,41593\,\text{rad/s} \approx 12,56637\,\text{rad/s}.$$

Tämän kulmanopeuden saavuttamiseen kuluu aikaa kiihdyttämisen alusta lukien

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{12,56637\ \text{rad/s}}{1,25\ \text{rad/s}^2} \approx 10\ \text{s}.$$

16. a) Akselin kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{4,3\,\text{rad/s} - 0,52\,\text{rad/s}}{2,4\,\text{s}} = 1,575\,\text{rad/s}^2 \approx 1,6\,\text{rad/s}^2.$$

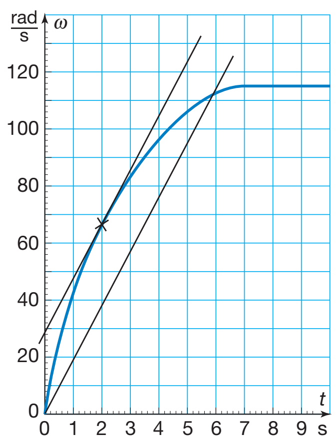
b) Kiihdytyksen aikana kiertokulma on

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0,52\,\text{rad/s} \cdot 2,4\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 1,575\,\text{rad/s}^2 \cdot (2,4\,\text{s})^2 = 5,784\,\text{rad}.$$

Kiertokulman suuruus asteina on $5,784\,\text{rad} = 5,784 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 330^\circ$.

17. a) Rummun keskikulmakiihtyvyys aikavälillä 0,0 s…6,0 s on

$$\alpha_k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{114\ \text{rad/s} - 0,0\ \text{rad/s}}{6,0\ \text{s} - 0,0\ \text{s}} = \frac{114\ \text{rad/s}}{6,0\ \text{s}} = 19\ \text{rad/s}^2.$$



b) Jotta keskikulmakiihtyvyys ja hetkellinen kiihtyvyys olisivat yhtä suuret, vastaavien suorien on oltava yhdensuuntaiset. Kuvaajalle kohtaan 2,0 s piirretty tangentti on yhdensuuntainen keskikulmakiihtyvyyttä kuvaavan suoran kanssa. Näin ollen hetkellä 2,0 s hetkellinen kulmakiihtyvyys on sama kuin keskikulmakiihtyvyys välillä 0,0 s … 6,0 s.

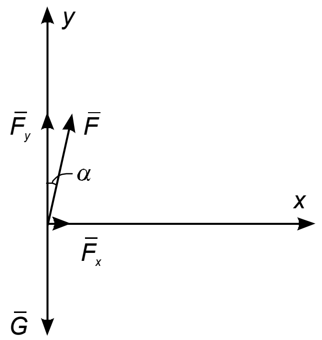
18. a) Auton kulmanopeus on $\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{\frac{110}{3{,}6}\,\text{m/s}}{53\,\text{m}} \approx 0{,}58\,\text{rad/s}.$

b) Auton radalla pitävän voiman suuruus on $F = m\dfrac{v^2}{r} = 1050\,\text{kg}\cdot\dfrac{\left(\frac{110}{3{,}6}\,\text{m/s}\right)^2}{53\,\text{m}} \approx 18\,\text{kN}.$

c) Auton pitää radalla (tiellä) auton renkaiden ja tienpinnan välinen lepokitka. Jos kitka on liian pieni, auto suistuu tieltä. Jos auto lähtee liukumaan, kyseessä ei ole enää lepokitka, vaan lepokitka on muuttunut liukukitkaksi.

d) Vaikka auton ratavauhti on vakio, nopeuden suunta kuitenkin muuttuu koko ajan. Autolla on normaalikiihtyvyyttä, joka suunta on kohti radan keskipistettä.

19. Linnun liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum \overline{F}_x = m\overline{a}_\text{n}$. Valitaan suunta kohti radan keskipistettä positiiviseksi.



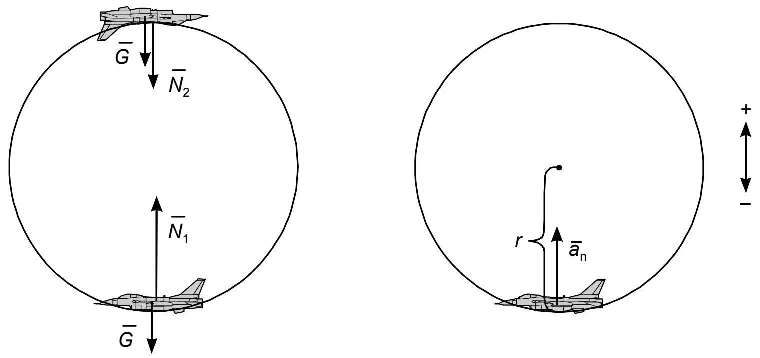
Linnun ratavauhti ympyräradalla on $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi\cdot 15\text{ m}}{16\text{ s}} \approx 5{,}8905\text{ m/s}.$ Voiman suuruus vaakasuunnassa on $F_x = ma_\text{n} = m\dfrac{v^2}{r} = 0{,}32\text{ kg}\cdot\dfrac{(5{,}8905\text{ m/s})^2}{15\text{ m}} \approx 0{,}74022\text{ N}.$

Koska linnulla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa, linnun liikeyhtälö pystysuunnassa on $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$ eli $\overline{F}_y + \overline{G} = \overline{0}$. Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, skalaariyhtälöstä $F_y - G = 0$ saadaan $F_y = G = mg = 0{,}32\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 3{,}1392\,\text{N}.$

Nostovoiman suuruus on $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(0{,}74022\text{ N})^2 + (3{,}1392\text{ N})^2} \approx 3{,}2\text{ N}.$

Nostovoiman suuntakulma pystytasoon nähden: $\tan\alpha = \dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{0{,}74022\text{ N}}{3{,}1392\text{ N}}$, josta $\alpha \approx 13°.$

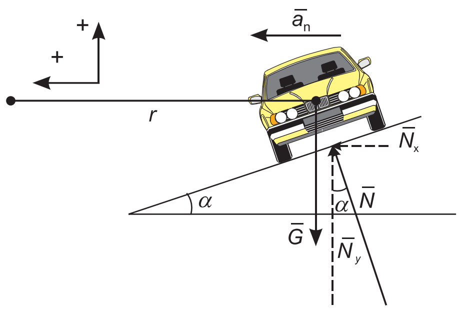
20. a) Oletetaan, että kysytyillä hetkillä tangenttikiihtyvyys on nolla. Lentäjään kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja penkistä tukivoima $\overline{N}$.



b) Lentäjän liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_n$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_n$. Sovitaan suunta kohti radan keskipistettä positiiviseksi. Ratkaistaan skalaariyhtälöstä $N - G = ma_n$ tukivoiman suuruus: $N = ma_n + G = m\dfrac{v^2}{r} + G$. Tukivoiman suuruus voi maksimissaan olla $N \leq 9G$ eli $m\dfrac{v^2}{r} + mg \leq 9mg$. Yhtälöstä $\dfrac{v^2}{r} + g \leq 9g$ eli $\dfrac{v^2}{r} \leq 8g$ säteen suuruudelle saadaan ehto:

$$r \geq \frac{v^2}{8g} = \frac{\left(\dfrac{1500}{3{,}6}\,\text{m/s}\right)^2}{8 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2} \approx 2{,}2\,\text{km}.$$

21. Kun vastusvoimat ovat pienet, autoon kohdistuvat voimat ovat paino ja tienpinnan tukivoima. Auton radan säteeksi oletetaan kohtisuora etäisyys radan keskipisteeseen. Auton tiellä pitävä kokonaisvoima suuntautuu kaarteen keskipistettä kohti ja on vaakasuora. Liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum \overline{F}_x = m\overline{a}_n$. Pystysuunnassa liikeyhtälö on $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$, koska autolla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa.



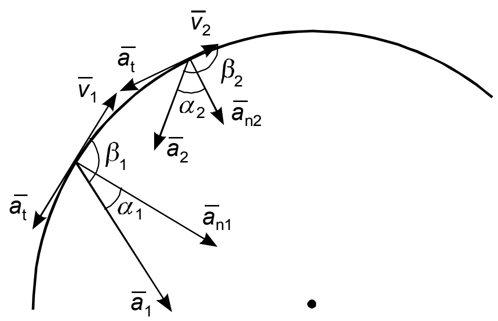
Kun valitaan suunnat keskipistettä kohti ja ylös positiivisiksi, saadaan skalaariyhtälöt

$N \sin\alpha = m\dfrac{v^2}{r}$ ja $N\cos\alpha - mg = 0$. Tukivoiman suuruudelle saadaan yhtälö $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

Kun yhtälö $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$ sijoitetaan yhtälöön $N\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{r}$, saadaan $\dfrac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{r}$, josta vauhdiksi saadaan

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\cos\alpha}\sin\alpha} = \sqrt{rg\tan\alpha} = \sqrt{240\text{ m}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\cdot\tan 12{,}0^\circ} \approx 22\text{ m/s}.$$

22. Ympyräradalla liikkuvalla veturilla on normaalikiihtyvyyttä ja tangenttikiihtyvyyttä, koska sen ratanopeus muuttuu. Kuviossa veturi liikkuu myötäpäivään.



Alkutilanne:

Alussa veturin normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_{n1} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\frac{95}{3{,}6}\text{ m/s})^2}{540\text{ m}} \approx 1{,}2896\text{ m/s}^2$$

ja tangenttikiihtyvyyden suuruus

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{60}{3{,}6}\text{ m/s} - \frac{95}{3{,}6}\text{ m/s}}{11\text{ s}} \approx -0{,}88384\text{ m/s}^2.$$

Veturin kiihtyvyyden suuruus alussa on

$$a_1 = \sqrt{a_t^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{(-0{,}88384\text{ m/s}^2)^2 + (1{,}28958\text{ m/s}^2)^2} \approx 1{,}6\text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden ja ympyräradan säteen välinen kulma:

$$\tan\alpha_1 = \left|\frac{a_t}{a_{n1}}\right| = \left|\frac{-0{,}88384\text{ m/s}^2}{1{,}2896\text{ m/s}^2}\right|,$$

josta kulma $\alpha_1 \approx 34{,}42559^\circ$.

Nopeuden ja kiihtyvyyden välinen kulma on

$$\beta_1 = 90^\circ + \alpha_1 = 90^\circ + 34{,}42559^\circ \approx 120^\circ.$$

Lopputilanne:

Lopussa veturin normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_{n2} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{60}{3,6}\ \text{m/s}\right)^2}{540\ \text{m}} \approx 0,51440\ \text{m/s}^2$$

ja tangenttikiihtyvyyden suuruus on yhtä suuri kuin alkutilanteessakin:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{60}{3,6}\ \text{m/s} - \frac{95}{3,6}\ \text{m/s}}{11\ \text{s}} \approx -0,88384\,\text{m/s}^2.$$

Veturin kiihtyvyys lopussa on

$$a_2 = \sqrt{a_t^2 + a_{n2}^2} = \sqrt{(-0,88384\,\text{m/s}^2)^2 + (0,51440\,\text{m/s}^2)^2} \approx 1,0\,\text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden ja ympyräradan säteen välinen kulma:

$$\tan\alpha_2 = \left|\frac{a_t}{a_{n2}}\right| = \left|\frac{-0,88384\,\text{m/s}^2}{0,51440\,\text{m/s}^2}\right|,\ \text{josta saadaan}\ \alpha_2 \approx 59,80034°.$$

Nopeuden ja kiihtyvyyden välinen kulma on

$$\beta_2 = 90° + \alpha_2 = 90° + 59,80034° \approx 150°.$$

23. Puupalan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$, jossa puupalan kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyden ja tangenttikiihtyvyyden vektorisumma: $\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_t$.

Puupala pysyy ympyräradalla kitkan $F_\mu = \mu N$ takia. Sovitaan suunta keskipistettä kohti positiiviseksi. Skalaariyhtälö $F_\mu = ma$ saadaan muotoon $\mu N = m\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ eli $\mu mg = m\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, josta kitkakerroin on $\mu = \frac{\sqrt{a_n^2 + a_t^2}}{g}$.

Puupalan normaalikiihtyvyyden suuruus on

$$a_n = \omega^2 r = (\alpha t)^2 r = (0,25\ \text{rad/s}^2 \cdot 6,5\ \text{s})^2 \cdot 1,5\ \text{m} \approx 3,96094\ \text{m/s}^2.$$

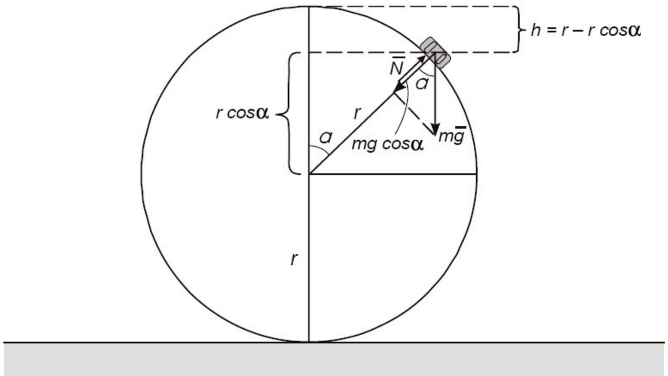
Puupalan tangenttikiihtyvyyden suuruus on

$$a_t = \alpha r = 0,25\ \text{rad/s}^2 \cdot 1,5\ \text{m} = 0,375\ \text{m/s}^2.$$

Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{\sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2}}{g} = \frac{\sqrt{(3,96094\ \text{m/s}^2)^2 + (0,375\ \text{m/s}^2)^2}}{9,81\ \text{m/s}^2} \approx 0,41.$$

24. Koska kappale liukuu kitkatta r-säteisen pallo pintaa alaspäin, voidaan soveltaa mekaanisen energian säilymislakia. Esineeseen kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi, jolloin saadaan yhtälö $mgh = \frac{1}{2}mv^2$. Irtoamishetkellä kappale on pudonnut pystysuunnassa matkan $h = r - r\cos\alpha$.



Sijoittamalla $h = r - r\cos\alpha$ yhtälöön $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan $\frac{1}{2}mv^2 = mg(r - r\cos\alpha)$, josta vauhdin neliö on $v^2 = 2gr(1-\cos\alpha)$.

Kun kappale liukuu pallopinnalla, säteen suunnassa vaikuttavat painon $\overline{G} = m\overline{g}$ säteen suuntainen komponentti pallon keskipistettä kohti ja pinnan tukivoima pallon pinnasta kappaleeseen. Kappaleen liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$ eli $\overline{G}_\text{r} + \overline{N} = m\overline{a}_\text{n}$. Sovitaan suunta pallon keskipistettä kohti positiiviseksi. Sijoitetaan skalaariyhtälöön $mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{r}$ vauhdin neliön yhtälö $v^2 = 2gr(1-\cos\alpha)$ ja otetaan huomioon, että kappaleen irtoamishetkellä tukivoima $\overline{N} = \overline{0}$. Saadaan yhtälö $mg\cos\alpha = m\frac{2gr(1-\cos\alpha)}{r}$ eli $\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha)$, josta $\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha$ ja edelleen $3\cos\alpha = 2$.

Yhtälöstä $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ saadaan kulmaksi $\alpha \approx 48{,}2°$.

Esineen irtoamiskorkeus pallon alareunasta mitattuna on

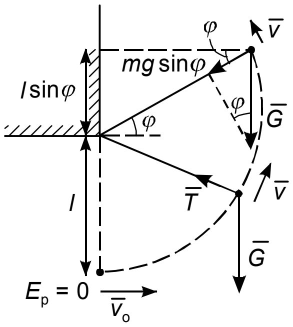
$$r + r\cos\alpha = r(1 + \cos 48{,}2°) \approx 1{,}67r.$$

25. Palloon kohdistuvat heilahduksen aikana langan jännitysvoima $\overline{T}$ ja paino $\overline{G}$. Ilmanvastus on pieni, koska pallo on pieni. Pallon liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}_\text{n}$. Valitaan suunnat alas ja kohti radan keskipistettä positiivisiksi. Pallo alkaa poiketa ympyräradalta, kun jännitysvoima $\overline{T} = \overline{0}$. Tällöin kulma on $\varphi = 125° - 90° = 35°$.

Näin ollen skalaariyhtälö saadaan muotoon $0 + G_x = ma_\text{n}$ eli $mg\sin\varphi = m\frac{v^2}{l}$.

Pallon nopeuden neliölle saadaan yhtälö $v^2 = gl\sin\varphi$.

Kun pallo alkaa poiketa ympyräradalta, se on noussut korkeudelle $h = l + l\sin\varphi$. Alussa pallolla oli liike-energiaa ja lopussa liike-energiaa ja potentiaalienergiaa. Ympyräradalta poikkeamisen hetkellä pallolla on vielä nopeutta ja siksi potentiaalienergian lisäksi liike-energiaa. Palloon kohdistuva paino tekee työtä palloon ja muuntaa liike-energiaa osittain potentiaalienergiaksi.



Mekaanisen energian säilymislain mukaan on $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$. Sijoittamalla tähän yhtälöön nopeuden neliön ja nousukorkeuden yhtälöt saadaan

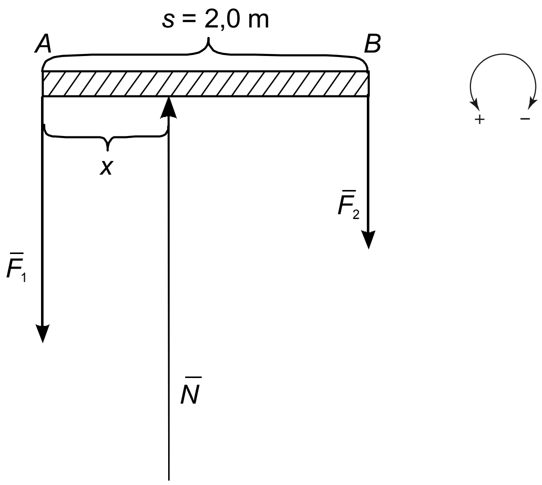
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(gl\sin\varphi) + mg(l + l\sin\varphi) \qquad \Big| \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_0^2 = gl\sin\varphi + 2gl + 2gl\sin\varphi = 3gl\sin\varphi + 2gl = gl(3\sin\varphi + 2).$$

Pallon lähtönopeudeksi saadaan

$$v_0 = \sqrt{gl(3\sin\varphi + 2)} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}85\ \text{m} \cdot (3\sin 35° + 2)} \approx 5{,}6\ \text{m/s}.$$

26.



Momentti akselin A suhteen on $M_A = -F_2 \cdot s = -35\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m} = -70\,\text{Nm}$.

Momentti akselin B suhteen on $M_B = F_1 \cdot s = 55\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m} = 110\,\text{Nm}$.

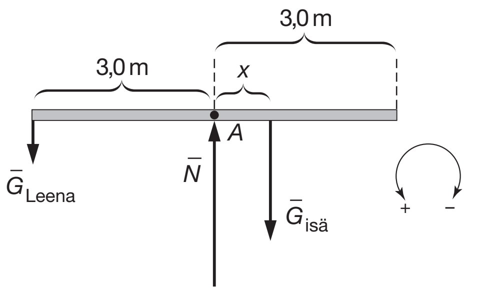
Voimien resultantin suuruus on R = 55 N + 35 N = 90 N ja suunta alas. Kaikkien momenttien vääntövaikutus on nolla minkä tahansa akselin suhteen, Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa akselin A suhteen on

$$\sum M_A = Nx - F_2 s = 0.$$

Resultanttivoiman suhteen vastakkaissuuntaisen voiman $\bar{N}$ vaikutussuoran paikka akselista A lukien on

$$x = \frac{F_2 s}{N} = \frac{35\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m}}{90\,\text{N}} \approx 0{,}78\,\text{m}.$$

27.



Leenan ja isän tulee asettua eri puolille tukipistettä eli laudan keskikohtaa A. Olkoon isän etäisyys tukipisteestä x. Jotta lauta pysyy tasapainossa, on momenttien summan oltava nolla minkä tahansa laudan akselin suhteen eli $\sum M = 0$. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, keskipisteen suhteen on $\sum M_A = M_{\text{isä}} - M_{\text{Leena}} = 0$ eli

$$G_{\text{isä}} \cdot x - G_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\,\text{m} = 0.$$

Isän etäisyys tukipisteestä on

$$x = \frac{G_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\text{ m}}{G_{\text{isä}}} = \frac{m_{\text{Leena}} g \cdot 3{,}0\text{ m}}{m_{\text{isä}} g} = \frac{m_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\text{ m}}{m_{\text{isä}}}$$

$$= \frac{30\text{ kg} \cdot 3{,}0\text{ m}}{80\text{ kg}} = 1{,}125\text{ m}.$$

Isän etäisyys Leenasta on silloin 1,125 m + 3,0 m ≈ 4,1 m.

28. a) Jos kiertosuunta myötäpäivään on negatiivinen, momentti on

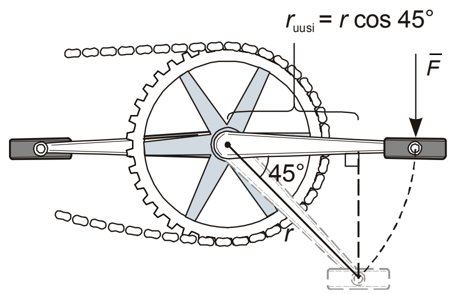
$$M = -Fr = -35\,\text{N} \cdot 0{,}17\,\text{m} \approx -6{,}0\,\text{Nm}.$$

b) Voiman vaikutussuoran etäisyys keskiöstä on nyt pienempi kuin a-kohdassa. Vääntövarren pituus on nyt

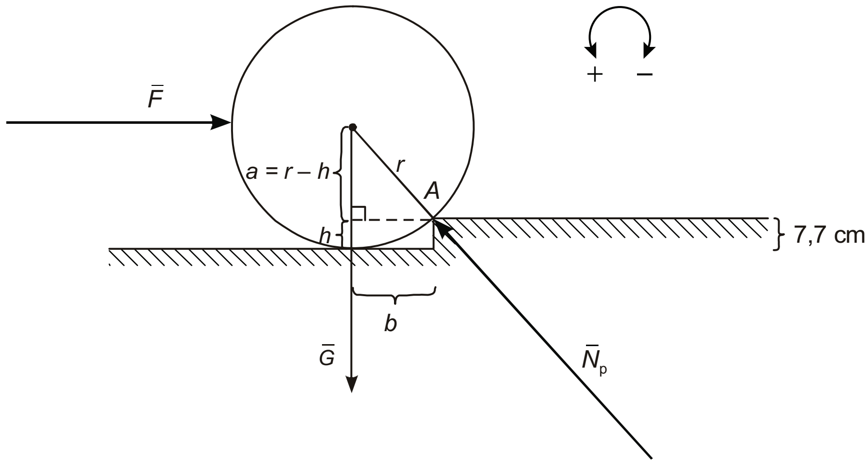
$$r_{\text{uusi}} = 0{,}17\,\text{m} \cdot \cos 45° = 0{,}120208\,\text{m}.$$

Momentti on

$$M = -Fr_{\text{uusi}} = -35\,\text{N} \cdot 0{,}120208\,\text{m} \approx -4{,}2\,\text{Nm}.$$



29. Puupölkkyyn vaikuttavat voimat ovat pölkkyyn kohdistuva paino $\overline{G}$, vaakasuoran maanpinnan tukivoima $\overline{N}_\mathrm{m}$, portaan reunan tukivoima $\overline{N}_\mathrm{p}$ ja työntövoima $\overline{F}$.
Tarkastellaan tilannetta, jossa pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Tällöin maanpinnan tukivoima $\overline{N}_\mathrm{m}$ on nolla. Lasketaan momenttien summa akselin *A* suhteen, tällöin voiman $\overline{N}_\mathrm{p}$ momentti on nolla. Selvitetään ensin pölkkyyn kohdistuvan painon ja työntövoiman varret.



Työntövoiman $\overline{F}$ varsi on $a = r - h = \dfrac{0{,}66\text{ m}}{2} - h = 0{,}33\text{ m} - 0{,}077\text{ m} = 0{,}253\text{ m}$.

Painon $\overline{G}$ varsi *b* saadaan Pythagoraan lauseen avulla: $b^2 + (r-h)^2 = r^2$, josta saadaan

$$b = \pm\sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{(0{,}33\text{ m})^2 - (0{,}253\text{ m})^2} \approx 0{,}211875\text{ m}.$$

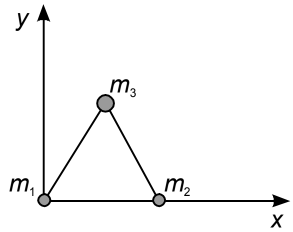
Hyväksytään vain varren positiivinen arvo. Tarkastellaan tilannetta, kun pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa akselin *A* suhteen on $\sum M_A = -Fa + Gb = 0$.

Yhtälöstä saadaan pienimmäksi työntövoimaksi

$$F = \frac{Gb}{a} = \frac{144\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 0{,}211875\,\text{m}}{0{,}253\,\text{m}} \approx 1200\text{ N}.$$

30. a) Paksumman pään massa on suurempi. Painopiste ei ole keskellä karttakeppiä, vaan lähempänä paksua päätä. Painopisteestä tuettuna karttakeppi pysyy tasapainossa. Silloin kepin päiden momenttien summa on nolla tukipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Lyhyempi eli paksumpi pää on raskaampi, koska tähän osaan kohdistuva paino on suurempi ja vääntövarsi näin ollen pienempi. Pidemmän osan vääntövarsi on suurempi, joten siihen kohdistuva paino on pienempi kuin lyhyemmän osan. Lyhyemmän osan massa on siis suurempi kuin pidemmän osan massa.

b)



Sijoitetaan koordinaatisto kuvan mukaisesti siten, että kuula m_1 sijaitsee origossa. Lasketaan ylimmän kappaleen paikka. Kolmion kaikki kulmat ovat $60°$. Ylimmän kappaleen paikan x-koordinaatti on $\frac{140\,\text{cm}}{2} = 70\,\text{cm}.$

Yhtälöstä $\tan 60° = \frac{y}{70\,\text{cm}}$ saadaan ylimmän kappaleen paikan y-koordinaatiksi

$$y = 70\,\text{cm} \cdot \tan 60° = 121{,}244\,\text{cm}.$$

Tällöin kuulien koordinaatit ovat

Kuula	Massa/kg	x/cm	y/cm
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,45	70	121,244

Painopisteen paikan x-koordinaatti on

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1{,}2\,\text{kg} \cdot 0 + 2{,}5\,\text{kg} \cdot 140\,\text{cm} + 3{,}45\,\text{kg} \cdot 70\,\text{cm}}{1{,}2\,\text{kg} + 2{,}5\,\text{kg} + 3{,}45\,\text{kg}} \\ &\approx 83\,\text{cm} \end{aligned}$$

ja y-koordinaatti

$$\begin{aligned} y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1{,}2\,\text{kg} \cdot 0 + 2{,}5\,\text{kg} \cdot 0 + 3{,}45\,\text{kg} \cdot 121{,}244\,\text{cm}}{1{,}2\,\text{kg} + 2{,}5\,\text{kg} + 3{,}45\,\text{kg}} \\ &\approx 59\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Painopiste on tässä koordinaatistossa kohdassa (83 cm, 59 cm).

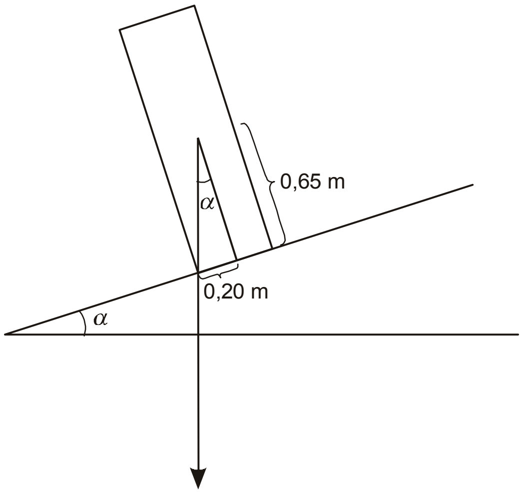
31. a) Ripusta kappale jostakin kohdasta. Kiinnitä luotilanka (lanka, jonka toisessa päässä on paino) ripustuspisteeseen ja piirrä luotilankaa käyttäen tästä pisteestä lähtien kappaleen pintaan suora viiva alas. Ripusta sitten kappale muistakin kohdista esimerkiksi kolme kertaa ja piirrä luotisuorat. Suorat leikkaavat kappaleen painopisteen kohdalla.

b) Painopisteen paikka pystysuunnassa on

$$y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_3 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{8{,}7\,\text{kg} \cdot 2{,}0\,\text{m} + 7{,}3\,\text{kg} \cdot 6{,}0\,\text{m} + 5{,}9\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m}}{8{,}7\,\text{kg} + 7{,}3\,\text{kg} + 5{,}9\,\text{kg}} \approx 5{,}5\,\text{m}.$$

Painopiste sijaitsee 5,5 m lipputangon tyvestä ylöspäin.

32.



Säiliö pysyy pystyssä, jos sen painopisteen kautta kulkeva luotisuora kulkee tukipinnan kautta. Rajatapauksessa saadaan yhtälö $\tan\alpha = \frac{0{,}20\,\text{m}}{0{,}65\,\text{m}}$, josta kaltevuuskulma on $\alpha \approx 17°$.

33. Kuvassa a pyörä muuttaa vain voiman suuntaa, se ei ole nostettavana kuormana. Langan jännitysvoima on yhtä suuri kuin punnukseen kohdistuvan painon suuruus. Vaaka näyttä langan jännitysvoiman suuruuden eli vaa´an näyttö on yhtä suuri kuin punnukseen kohdituva paino eli G_{punnus} = 1,5 N.

Kuvassa b pyörään ja punnukseen kohdistuvan painon suuruinen voima kuormittaa kahta alemman pyörän ripustuslankaa. Vaaka näyttää langan jännitysvoiman suuruuden eli

$$\frac{1}{2}(G_{\text{punnus}} + G_{\text{pyörä}}) = \frac{1}{2}(1{,}5\text{ N} + 0{,}2\text{ N}) = 0{,}85\text{ N}.$$

34. a) Yhden pyörähdyksen aikana voiman $\overline{F}_2$ vaikutuspiste siirtyy matkan $2\pi r_2$. Voiman $\overline{F}_2$ vaikutuspiste siirtyy matkan $(2\pi r_2 - 2\pi r_1)/2$ ylöspäin.

Ketjun vetämisessä tehty työ on yhtä suuri kuin kappaleen nostamisessa tehty työ, jolloin

$$W_2 = W_1 \text{ eli } F_2 \cdot 2\pi r_2 = F_1 \cdot \frac{2\pi r_2 - 2\pi r_1}{2},$$

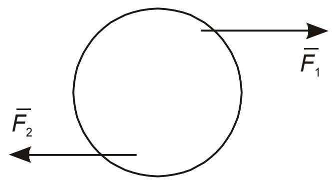
josta saadaan $F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1$.

Säteiden lähentyessä toisiaan, niiden erotus lähenee nollaa. Tällöin tarvittava vetovoima pienenee, jos kuorma pysyy samana. Differentiaalitaljalla voidaan nostaa sitä suurempi kuorma, mitä pienempi pyörien säteiden erotus on.

b) Tasapainoehdosta $F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1$ saadaan kuormaksi

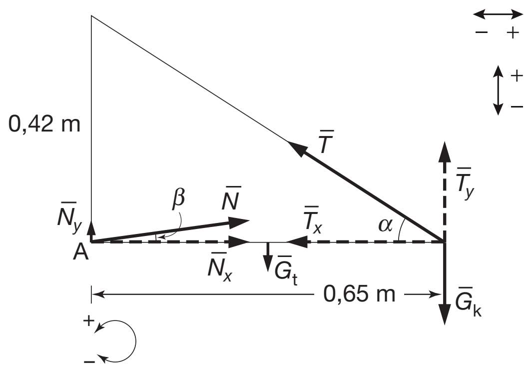
$$F_1 = \frac{F_2}{\frac{r_2 - r_1}{2r_2}} = \frac{850\,\text{N}}{\frac{22\,\text{cm} - 15\,\text{cm}}{2 \cdot 22\,\text{cm}}} \approx 5{,}3\,\text{kN}.$$

35. a) Väite on väärin. Kappale on tasapainossa etenemisen suhteen, jos kokonaisvoima on nolla, ja pyörimisen suhteen, jos kokonaismomentti on nolla. Esimerkiksi kuvan tilanteessa kokonaisvoima on nolla, mutta silti voimat aiheuttavat kappaleeseen sitä kääntämään pyrkivän momentin.



b) Väite on väärin. Jos kokonaismomentti on nolla, niin kappale on levossa pyörimisen suhteen tai sitten se pyörii tasaisesti. Tällöin pyörimissuunnassa voiman momentti on yhtä suuri kuin vastusvoimien aiheuttama momentti. Jos esimerkiksi auton, polkupyörän tai junan pyörät pyörivät vakiona pysyvällä kulmanopeudella, pyörään kohdistuvien momenttien summa on nolla. Tällöin pyörimistä vastustavien voimien (laakereiden kitka ja vierimisvastus) momentti on yhtä suuri mutta vaikuttaa vastakkaiseen kiertosuuntaan kuin pyörimistä ylläpitävien voimien momentit. Kun kappale vierii alas kaltevaa pintaa tasaisella nopeudella, pyörimistä ylläpitävä voima on pinnasta pyörään kohdistuva kitka.

36.



$$\tan\alpha = \frac{0{,}42\text{ m}}{0{,}65\text{ m}} \qquad \alpha = 32{,}8687°$$

Tukitanko on tasapainossa, joten siihen kohdistuvien voimien summa on nolla eli $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja momenttien summa on nolla eli $\sum M = 0$. Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiyhtälö kiertoakselin A suhteen on

$\sum M_A = l \cdot T_y - \frac{l}{2} \cdot G_t - l \cdot G_k = 0,$ joka jakamalla pituudella l yksinkertaistuu muotoon

$T_y - \frac{G_t}{2} - G_k = 0.$ Koska $T_y = T \sin\alpha,$ vaijerin jännitysvoiman suuruus on

$$T = \frac{\frac{G_t}{2} + G_k}{\sin\alpha} = \frac{\left(\frac{m_t}{2} + m_k\right)g}{\sin\alpha} = \frac{\left(\frac{1{,}2\text{ kg}}{2} + 5{,}2\text{ kg}\right) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sin 32{,}8687°} = 104{,}839\text{ N} \approx 100\text{ N}.$$

Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Koska vaakasuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_x = \overline{0},$ saadaan yhtälö $N_x - T_x = 0,$ josta

$$N_x = T_x = T\cos\alpha = 104{,}839\text{ N} \cdot \cos 32{,}8687° \approx 88{,}0560\text{ N}.$$

Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Koska pystysuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_y = \overline{0},$ saadaan yhtälö $N_y - G_t - G_k + T_y = 0,$ josta

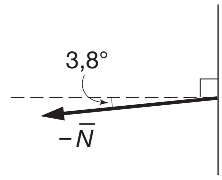
$$\begin{aligned} N_y &= G_t + G_k - T_y = (m_t + m_k)g - T\sin\alpha \\ &= (1{,}2\text{ kg} + 5{,}2\text{ kg}) \cdot 9{,}81\text{ m/s} - 104{,}839\text{ N} \cdot \sin 32{,}8687° = 5{,}88623\text{ N}. \end{aligned}$$

Seinän tankoon kohdistaman kokonaisvoiman suuruus on

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{(88{,}0560\text{ N})^2 + (5{,}88623\text{ N})^2} \approx 88\text{ N}.$$

Voiman suunnan määrittävä kulma saadaan yhtälöstä $\tan\beta = \frac{N_y}{N_x} = \frac{5{,}88623\text{ N}}{88{,}0560\text{ N}},$ josta kulma on $\beta \approx 3{,}8°$. Kysytty tukitangon seinään kohdistama voima on voiman $\overline{N}$ vastavoima ja siten Newtonin III lain mukaan yhtä suuri, mutta suunnaltaan vastakkainen.

Vaijeriin BC kohdistuva jännitysvoiman suuruus on 100 N vaijerin suuntaan. Tukitangon AB seinään kohdistaman voiman suuruus on 88 N ja suuntakulma seinän normaalin suhteen 3,8° (kuvio).



37. a) Sauvan hitausmomentti on $J = \frac{ml^2}{12},$ josta sauvan pituudeksi saadaan

$$l = \sqrt{\frac{12J}{m}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 1{,}2\,\text{kgm}^2}{0{,}250\,\text{kg}}} \approx 7{,}6\,\text{m}.$$

b) Sauvan hitausmomentti muuttuu pyörimisakselin paikan muuttuessa. Esimerkiksi toisen pään ympäri pyöriessään sauvan hitausmomentti on suurempi kuin a-kohdassa $\left(J = \frac{1}{3}ml^2\right)$.

c) Hitausmomentti kuvaa kappaleen kykyä vastustaa pyörimisen muutoksia, ts. hitausmomentti kuvaa kappaleen pyörimisen hitautta. Kappaleen pyörimisen hitaus vaikuttaa levossa olevan kappaleen pyörimään saattamiseen sekä yhtä lailla jo pyörivän kappaleen kulmanopeuden muuttamiseen eli kiihdyttämiseen tai jarruttamiseen.

38. Sauvan pää liikkuu pitkin ympyrärataa, jonka säde on l = 0,52 m. Pään ratanopeus on $v = \omega l$. Sauvaan kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa sauvan potentiaalienergiaa pyörimisenergiaksi, koska sauva pääsee pyörimään toisen päänsä kautta kulkevan akselin ympäri. Sauvan painopisteen korkeuden muutos on $l/2$. Ratkaistaan sauvan kulmanopeus lopputilanteessa yhtälöstä $\frac{1}{2}J\omega^2 = mg\frac{l}{2}$ eli $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2}$, josta saadaan $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

Sauvan vapaan pään nopeus on

$$v = \omega l = \sqrt{\frac{3g}{l}}\cdot l = \sqrt{3gl} = \sqrt{3\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0{,}52\,\mathrm{m}} \approx 3{,}9\,\mathrm{m/s}.$$

39. Momentti, joka vaikuttaa keskeltä akseloituun umpinaiseen tankoon on $M = Fr$.

Pyörimisen liikeyhtälö on $\sum M = J\alpha$ eli $Fr = J\alpha$. Yhtälö saadaan muotoon $Fr = \frac{1}{2}mr^2\alpha$, josta kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{Fr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{42\,\mathrm{N}\cdot 0{,}012\,\mathrm{m}}{\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}012\,\mathrm{m})^2} = 2800\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}.$$

40. Koska liikevastusvoimia voidaan pitää vähäisinä, sovelletaan mekaanisen energian säilymislakia. Sylinteriin kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike- ja rotaatioenergiaksi: $m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ eli $m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2$,

josta saadaan $m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{4}mv^2$. Kappaleen nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{2m_1gh}{m_1 + \frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 120\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\cdot 1{,}7\text{ m}}{120\text{ kg} + \frac{1}{2}\cdot 75\text{ kg}}} \approx 5{,}0\text{ m/s}.$$

41. Sovitaan ämpärin potentiaalienergian nollataso ämpärin ala-asemaan. Pudonneella ämpärillä ei ole potentiaalienergiaa lopussa, mutta on liike-energiaa. Osa alussa olleesta potentiaalienergiasta kuluu liikevastusten voittamiseen.

Ämpärin potentiaalienergian muutos on yhtä suuri kuin kitkamomenttia vastaan tehdyn työn ja systeemin liike-energian summa lopussa:

$$E_{\mathrm{pot}} = W_\mu + E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{rot}} \text{ eli } mgh = W_\mu + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Kitkatyö saadaan muotoon $W_\mu = F_\mu\cdot\Delta s = \frac{M_\mu}{r}\cdot r\Delta\varphi = M_\mu\Delta\varphi.$ Koska kulmanopeus on $\omega = \frac{v}{r}$, kiertymälle saadaan yhtälö $\Delta\varphi = 2\pi\cdot n = 2\pi\cdot\frac{h}{p} = 2\pi\cdot\frac{h}{2\pi r} = \frac{h}{r}$, jossa h on pudotuskorkeus.

Oletetaan, että köysi ei veny eikä liu'u, jolloin yhtälö

$$mgh = W_\mu + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

saadaan muotoon

$$mgh = M_\mu \Delta\varphi + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$mgh - M_\mu \frac{h}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2}$$

$$h(mg - \frac{M_\mu}{r}) = \frac{1}{2}v^2(m + \frac{J}{r^2}).$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus:

$$v^2 = \frac{2h(mg - \frac{M_\mu}{r})}{m + \frac{J}{r^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2h\left(mg - \frac{M_\mu}{r}\right)}{m + \frac{J}{r^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2\,\mathrm{m} \cdot \left(12\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - \frac{1{,}4\,\mathrm{Nm}}{0{,}090\,\mathrm{m}}\right)}{12\,\mathrm{kg} + \frac{0{,}028\,\mathrm{kgm^2}}{(0{,}090\,\mathrm{m})^2}}} \approx 6{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

42. Pallon vierimistä alaspäin voidaan tarkastella käyttäen mekaanisen energian säilymislakia, kun ilmanvastus ja vierimisvastus ovat vähäisiä. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi pallon alustasta irtoamisen taso. Pallon vieriessä liukumatta alas palloon kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa pallon potentiaalienergiaa translaatioenergiaksi ja kitkamomentti potentiaalienergiaa rotaatioenergiaksi. Vierimisen loppuvaiheessa pallon siirtyessä alimmasta pisteestä nollatasolle vastaavasti rotaatio- ja translaatioenergiaa muuntuu potentiaalienergiaksi:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Koska $J = \frac{2}{5}mr^2$ ja $v = \omega r$, mekaanisen energian säilymislaki saadaan muotoon

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \quad \text{eli}$$

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{2}{10}\cdot mv^2 \quad \text{eli}$$

$$gh_1 = \frac{7}{10}v^2, \quad \text{josta}$$

nopeus potentiaalienergian nollatasolla on $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1}$.

Pallon irrottua alustasta palloon kohdistuva paino muuntaa translaatioenergiaa potentiaalienergiaksi. Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv^2 = mgh_2$ saadaan nousukorkeudeksi

$$h_2 = \frac{\frac{1}{2}v^2}{g} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{7}gh_1}{g} = \frac{5}{7}h_1 = \frac{5}{7}\cdot 0{,}95\,\text{m} \approx 0{,}68\,\text{m}.$$

43. a) Autot vetävät toisiaan puoleensa voimalla, jonka suuruus on

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67259\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{1200\,\text{kg}\cdot 1600\,\text{kg}}{(2{,}5\,\text{m})^2} \approx 2{,}0\cdot 10^{-5}\,\text{N}.$$

Molemmat autot vetävät toisiaan puoleensa yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla (Newtonin III laki).

b) Satelliitin liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m_{\text{sat}}\overline{a}_{\text{n}}$. Gravitaatiovoima pakottaa satelliitin ympyräradalle. Valitaan suunta kohti Maan keskipistettä positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$$\gamma\frac{m_{\text{sat}}m_{\text{Maa}}}{(2R)^2} = m_{\text{sat}}\frac{v^2}{2R}$$ jossa R on Maan säde. Nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma m_{\text{Maa}}}{2R}} = \sqrt{\frac{6{,}67259\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2\cdot 5{,}974\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{2\cdot 6{,}378\cdot 10^6\ \text{m}}} \approx 5{,}6\ \text{km/s}.$$

44. Keplerin III laista $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ saadaan Pluton keskietäisyydeksi Auringosta

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{r_1^3 T_2^2}{T_1^2}} = \sqrt[3]{\frac{(149{,}6\cdot 10^6\cdot 10^3\,\text{m})^3\cdot(246{,}8\,\text{a})^2}{(1{,}0000\,\text{a})^2}} \approx 5{,}886\cdot 10^{12}\ \text{m} = 5886\cdot 10^6\ \text{km}.$$

45. a) Olkoon lentokoneen massa m. Gravitaatiokentän voimakkuus 12,0 km korkeudella maanpinnasta on

$$g_r = \frac{F}{m} = \frac{\gamma\frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma\frac{M}{r^2} = 6{,}67259\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}}\cdot\frac{5{,}974\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6378\ \text{km}+12{,}0\ \text{km})^2} \approx 9{,}762\ \text{m/s}^2.$$

46. Gravitaatiovoiman takia Mars kiertää radallaan Auringon ympäri. Marsin liikeyhtälö Aurinkoa kiertävällä radalla on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_\text{n}$. Kun suunta kohti Auringon keskipistettä on positiivinen, skalaariyhtälöstä $\gamma \dfrac{M_A \cdot m}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$ saadaan Auringon massaksi

$$M_A = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(24{,}13 \cdot 10^3 \text{ m/s})^2 \cdot 227{,}9 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ m}}{6{,}67259 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2} \approx 1{,}989 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

47. Putoamiskiihtyvyys toisen planeetan pinnalla on

$$g_\text{Planeetta} = \gamma \frac{m_\text{Planeetta}}{r_\text{Pl}^{\ 2}} = \gamma \frac{100 m_\text{Maa}}{(10 r_\text{Maa})^2} = \gamma \frac{m_\text{Maa}}{r_\text{Maa}}$$

$$= 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6378 \cdot 10^3 \text{ m})^2} \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

48. Valitaan suunta alas positiiviseksi. Yhtälöstä $s = \dfrac{1}{2}gt^2$ saadaan putoamisajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} = 2{,}67125\,\text{s} \approx 2{,}7\,\text{s}.$$

Loppunopeus on $v = v_0 + gt = 0 + gt = 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 2{,}67125\,\text{s} \approx 26\,\text{m/s}$.

49. Oletetaan, että hyppääjä putoaa suoraan alas. Lasketaan hyppääjän nopeus 120 metrin pudotuksen jälkeen. Oletetaan, että hyppääjään kohdistuva ilmanvastus on vähäinen. Hyppääjään kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi. Mekaanisen energian säilymislaista $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2$ saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 120\,\text{m}} \approx 48{,}52216\,\text{m/s}.$$

Alkuvaiheen jälkeen liike on hidastuvaa. Avautuneeseen varjoon kohdistuva ilmanvastus hidastaa liikettä. Lasketaan aika, jonka kuluessa nopeus pienenee arvoon 5,0 m/s. Loppunopeus on $v = v_0 + at$, josta ajaksi saadaan

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{5{,}0\,\text{m/s} - 48{,}52216\,\text{m/s}}{-2{,}0\,\text{m/s}^2} = 21{,}76108\,\text{s}.$$

Tässä ajassa kuljettu matka on

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 48{,}52216 \text{ m/s} \cdot 21{,}76108 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}0 \text{ m/s}^2) \cdot (21{,}76108 \text{ s})^2$$
$$\approx 582{,}35000 \text{ m}.$$

Laskuvarjohyppääjän on hypättävä vähintään korkeudelta 120 m + 582,35000 m ≈ 700 m.

50. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on heittopisteessä. Sovitaan suunta alas positiiviseksi. Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, pallon liikettä voidaan pitää tasaisesti kiihtyvänä.

a) Pallon putoamana matka saadaan yhtälöstä $h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ eli $\frac{g}{2}t^2 + v_0 t - h = 0$.

Lentoaika saadaan käyttäen toisen asteen ratkaisukaavaa:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 - 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot (-h)}}{2 \cdot \frac{g}{2}} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 + 2gh}}{g}$$

$$= \frac{-15\text{ m/s} \pm \sqrt{(15\text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 114\text{ m}}}{9{,}81\text{ m/s}^2}.$$

Ratkaisuna saadaan $t_1 \approx 3{,}52857$ s ja $t_2 \approx -6{,}6$ s, joka hylätään. Pallo törmää maahan 3,5 s:n kuluttua.

b) Pallon nopeus on $v = v_0 + gt = 15\,\text{m/s} + 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}52857\,\text{s} \approx 50\,\text{m/s}$.

Pallon nopeus voidaan ratkaista myös mekaanisen energian säilymislain avulla:

$$mgh_a + \frac{1}{2}m{v_a}^2 = mgh_1 + \frac{1}{2}m{v_1}^2.$$

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi maanpinta ($h_1 = 0$). Loppunopeudeksi saadaan

$$v_1 = \sqrt{2gh_a + {v_a}^2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 114\,\text{m} + (15\,\text{m/s})^2} \approx 50\,\text{m/s}.$$

51. Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Kiven ylöspäin nousemisen aikana kiveen kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa liike-energian potentiaalienergiaksi. Putoamisen aikana paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergian liike-energiaksi. Sovitaan rotkon pohja potentiaalienergian nollatasoksi.

Yhtälöstä $mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$ putoamisnopeuden suuruudeksi rotkon pohjalla saadaan

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{(18\,\text{m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 49\,\text{m}} \approx 35{,}85220\,\text{m/s}.$$

Sovitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin rotkon pohjaan osumisen nopeus on $v = -35{,}85220$ m/s.

Koska liike on tasaisesti kiihtyvää, loppunopeus saadaan yhtälöstä $v = v_0 - gt$.

Tapahtumaan kulunut aika on $t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{18\,\text{m/s} - (-35{,}85220\,\text{m/s})}{9{,}81\,\text{m/s}^2} \approx 5{,}5\,\text{s}.$

Kivi putoaa 5,5 sekunnin kuluttua rotkoon nopeudella 36 m/s.

52. Ilmanvastusta ei oteta huomioon, jolloin kiven liike on pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvää ja vaakasuunnassa tasaista. Yhtälöstä $h = \frac{1}{2}gt^2$ saadaan putoamisajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} \approx 2{,}55420\,\text{s}.$$

Kantama on $x = v_0 \cdot t = 22\,\text{m/s} \cdot 2{,}55420\,\text{s} \approx 56\,\text{m}$.

Lasketaan nopeuden suunta ja suuruus maahan osumisen hetkellä. Sovitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Nopeuden suuruus saadaan yhtälöstä

$$v = \sqrt{v_y^{\,2} + v_x^{\,2}} = \sqrt{(-gt)^2 + v_x^{\,2}} = \sqrt{(-9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 2{,}55420\text{ s})^2 + (22\text{ m/s})^2} \approx 33\text{ m/s}.$$

Kiven nopeus *y*-suunnassa on $v_y = v_{0y} - gt.$ Koska kivi heitetään rantatörmältä vaakasuoraan, on $v_{0y} = 0$ m/s, joten $v_y = -gt$.

Nopeuden suuntakulma vaakatasoon nähden saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-gt}{v_x} = \frac{-9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 2{,}55420\text{ s}}{22\text{ m/s}},\ \text{josta}\ \alpha \approx -49°.$$

Kiven kantama on 56 m vaakasuuntaan, nopeuden suuruus 33 m/s ja suuntakulma $-49°$. Nopeuden suunta on vaakatasosta vinosti alaspäin.

53. a) 1) Ei, koska nopeus ei ole vakio pystysuorassa heittoliikkeessä.

2) Ei, koska pystysuorassa heittoliikkeessä nopeus muuttuu positiivisesta negatiiviseksi.

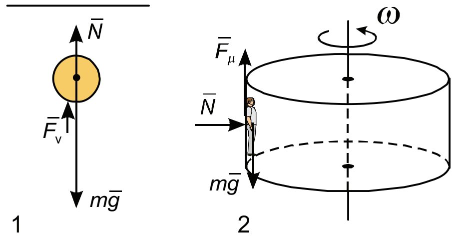
3) Kyllä, koska kiihtyvyys on vakio ja negatiivinen (hidastuva liike) ja nopeus muuttuu kuvassa positiivisesta negatiiviseksi.

4) Ei, koska kiihtyvyyden tulee olla piirroksessa vakio.

5) Kyllä, koska kiihtyvyys on vakio ja negatiivinen.

b) Kivi, joka putoaa vedessä: kiveen kohdistuvat voimat ovat paino, noste ja veden vastus.

Karusellissa oleva henkilö: henkilöön kohdistuvat voimat ovat paino, lepokitka ja seinästä henkilöön kohdistuva tukivoima.



54. a) Sylinteriin kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi. Kitkamomentti tekee työtä ja muuntaa osan potentiaalienergiasta rotaatioenergiaksi. Lähtökorkeus katon reunasta mitattuna on $h = 6{,}0\,\text{m} \cdot \sin 35° \approx 3{,}44146\,\text{m}$. Systeemin ulkoiset vastustavat voimat, kuten ilmanvastus, voidaan olettaa vähäisiksi. Silloin sylinterin potentiaalienergia muuntuu vierimisen aikana etenemisen ja pyörimisen liike-energiaksi ja mekaanisen energian säilymislakia voidaan soveltaa: $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ ja edelleen $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$ eli

$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2.$

Sylinterin nopeus katon reunalla on

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}44146\,\text{m}}{3}} \approx 6{,}70927\,\text{m/s}.$$

Sylinterin kulmanopeus on $\omega = \frac{v}{r} = \frac{6{,}70927\,\text{m/s}}{0{,}18\,\text{m}} \approx 37\,\text{rad/s}.$

b) Katon reunan jälkeen sylinterin liikettä voidaan tarkastella vinona heittoliikkeenä, jonka alkunopeus $v_0 = 6{,}70927\,\text{m/s}$.

Alkunopeuden vaakakomponentin suuruus on

$$v_{0x} = v_0 \cos 35° = 6{,}70927\ \text{m/s} \cdot \cos 35° \approx 5{,}49591\,\text{m/s}.$$

Alkunopeuden pystykomponentin suuruus on

$$v_{0y} = v_0 \sin 35° = 6{,}70927\ \text{m/s} \cdot \sin 35° \approx 3{,}84828\,\text{m/s}.$$

Pystysuunnassa sylinteri putoaa heiton aikana 5,0 metrin matkan, joten yhtälöstä

$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$ eli $\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t - y = 0$ saadaan putoamisaika käyttäen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa:

$$t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{(v_{0y})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}g \cdot (-y)}}{2 \cdot \frac{1}{2}g}$$

$$= \frac{-3{,}84828\,\text{m/s} \pm \sqrt{(3{,}84828\,\text{m/s})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (-5{,}0\,\text{m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}.$$

Yhtälön ratkaisut ovat $t_1 = 0{,}69089$ s (tai $t_2 = -1{,}47545$ s).

Hyväksytään vain ajan positiivinen arvo. Tässä ajassa sylinteri liikkuu vaakasuunnassa matkan $x = v_{0x}t = 5{,}49594\,\text{m/s} \cdot 0{,}69089\,\text{s} \approx 3{,}8\,\text{m}.$