Kertaustehtävien ratkaisut

1. c) Saranoihin vaikuttava momentti on molemmissa tapauksissa yhtä suuri. Yhtälöstä $M_2 = M_1$ eli $F_2r_2 = F_1r_1$ saadaan työntövoimaksi

$$F_2 = \frac{F_1r_1}{r_2} = \frac{87\,\text{N} \cdot 1{,}30\,\text{m}}{0{,}30\ \text{m}} \approx 380\ \text{N}.$$

2. c) Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla minkä tahansa akselin suhteen. Lasketaan momentit nivelen A suhteen. Yhtälöstä $M_1 - M_2 = 0$ saadaan $M_2 = M_1$ eli $F_2r_2 = F_1r_1$, josta etuhampaiden puristusvoimaksi saadaan

$$F_2 = \frac{F_1r_1}{r_2} = \frac{720\,\text{N} \cdot 30\,\text{mm}}{120\,\text{mm}} = 180\,\text{N}.$$

3. b) Tyhjän tölkin painopiste on korkeudella $\frac{11\,\text{cm}}{2} = 5{,}5\,\text{cm}$. Pohjalla olevan juoman korkeus saadaan yhtälöstä $\pi r^2 h = V$.
Nestepinta on korkeudella

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{100\,\text{cm}^3}{\pi(3{,}5\,\text{cm})^2} = 2{,}598\,\text{cm}.$$

Oletetaan, että juoman tiheys on yhtä suuri kuin veden tiheys 1,0 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Silloin juoman massa on 100 g ja sen painopisteen korkeus on $\frac{2{,}598\,\text{cm}}{2} = 1{,}299\,\text{cm}$.
Koko systeemin painopisteen korkeus pöydän pinnasta on

$$y_0 = \frac{15\,\text{g} \cdot 5{,}5\,\text{cm} + 100\,\text{g} \cdot 1{,}299\,\text{cm}}{115\,\text{g}} \approx 1{,}8\,\text{cm}.$$

4. b) Tasapainoasemassa palloon vaikuttavat painovoima $\overline{G}$ ja langan jännitysvoima $\overline{T}$. Näiden voimien vektorisumma pakottaa pallon ympyräradalle ja aiheuttaa normaalikiihtyvyyden. Pallon liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$. Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $T - G = ma_\text{n}$.
Langan jännitysvoima on

$$\begin{aligned} T &= ma_\text{n} + G = m\frac{v^2}{r} + mg \\ &= 0{,}065\,\text{kg} \cdot \frac{(4{,}7\,\text{m/s})^2}{0{,}34\,\text{m}} + 0{,}065\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \\ &\approx 4{,}9\,\text{N}. \end{aligned}$$

(Jos pallo riippuisi langassa paikallaan, jännitysvoima olisi

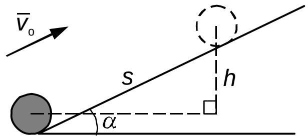
$$T = G = mg = 0{,}065\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}64\,\text{N}.$$

Ympyräradalla liikkuvan pallon jännitysvoima on nyt $T \approx 8G$.)

5. a) Ratanopeus on

$$v = \omega r = 15\frac{1}{\text{s}} \cdot 0{,}035\,\text{m} \approx 53\,\text{cm/s}.$$

6. c)



Kitkamomentin tekemä työ muuntaa pyörimisen rotaatioenergian potentiaalienergiaksi ja painovoiman tekemä työ etenemisen translaatioenergian potentiaalienergiaksi, kun vieriminen tapahtuu liukumatta. Kitka on lepokitkaa. Oletetaan, että liikevastuksia ei ole. Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$\frac{1}{2}mv_0^{\,2} + \frac{1}{2}J\omega_0^{\,2} = mgh.$$

Tämän yhtälön vasemman puolen termit tulevat eri voimista. Summa on oikealla. Loppukorkeus on $h = s \cdot \sin\alpha$, jossa s on vierimismatka. Sijoitetaan mekaanisen energian säilymislain yhtälöön kulmanopeuden ja hitausmomentin yhtälöt

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} \text{ ja } J = \frac{1}{2}mr^2$$

ja ratkaistaan alkunopeus:

$$\frac{1}{2}mv_0^{\,2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}v_0^{\,2} + \frac{1}{4}v_0^{\,2} = gh$$

$$\frac{3}{4}v_0^{\,2} = gh$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin\alpha} = \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1{,}2\,\text{m}\cdot\sin 25^\circ} \approx 2{,}6\,\text{m/s}.$$

7. a) Kun Maan säteenä käytetään ekvaattorisädettä, putoamiskiihtyvyys on

$$g_r = \gamma\frac{m_M}{r^2} = 6{,}67259\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5{,}974\cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(350\cdot 10^3\,\text{m} + 6378\cdot 10^3\,\text{m})^2}$$

$$\approx 8{,}8\,\text{m/s}^2.$$

8. c) Putoamiskiihtyvyys toisen planeetan pinnalla on

$$
\begin{aligned}
g_{\text{Pl.}} &= \gamma \frac{m_{\text{Pl.}}}{r_{\text{Pl}}^{\ 2}} = \gamma \frac{100 m_{\text{Maa}}}{(10 r_{\text{Maa}})^2} = \gamma \frac{m_{\text{Maa}}}{r_{\text{Maa}}} \\
&= 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6378 \cdot 10^3\, \text{m})^2} \\
&\approx 9{,}8\,\text{m/s}^2.
\end{aligned}
$$

9. c) Nopeus ajan funktiona on $v = v_0 - gt$. Lakipisteessä nopeus $v = 0$, jolloin nousuaika on

$$
t = \frac{v_0}{g} = \frac{20\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 2{,}0\,\text{s}.
$$

10. c) Alkunopeuden pystykomponentti on

$$
v_{oy} = v_0 \sin 36^\circ = 27\,\text{m/s} \cdot \sin 36^\circ = 15{,}87\,\text{m/s}.
$$

Lakipisteessä kappaleen nopeuden pystykomponentti $v_y = 0$. Tästä saadaan yhtälö

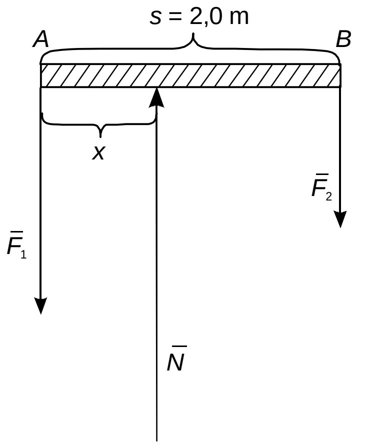
$$
v_y = v_{0y} - gt = 0
$$

ja edelleen nousuaika

$$
t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15{,}87\,\text{m/s}}{9{,}81\,\text{m/s}^2} = 1{,}62\,\text{s}.
$$

Lentoaika on $2t \approx 3{,}2$ s.

11.



Momentti akselin A suhteen on $M_A = F_2 \cdot s = 35\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m} = 70\,\text{Nm}$.
Momentti akselin B suhteen on $M_B = F_1 \cdot s = 55\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m} = 110\,\text{Nm}$.

Voimien resultantti on R = 55 N + 35 N = 90 N alaspäin. Resultanttivoiman aiheuttama momentti akselin A suhteen on yhtä suuri kuin voiman F_2 aiheuttama momentti akselin A suhteen. Kun sauva on tasapainossa, sauvaan pitää vaikuttaa punnuksien aiheuttamaan momenttiin nähden vastakkaissuuntainen momentti. Resultanttivoiman suuruinen, mutta vastakkaissuuntainen voima N vaikuttaa sauvaan ylöspäin. Kaikkien momenttien vääntövaikutus on nolla minkä tahansa akselin suhteen, joten momenttien summa akselin A suhteen on $Nx - F_2 s = 0.$ Resultanttivoiman suhteen vastakkaissuuntaisen voiman N vaikutussuoran paikka akselista A lukien on

$$x = \frac{F_2 s}{N} = \frac{35\,\mathrm{N} \cdot 2,0\,\mathrm{m}}{90\,\mathrm{N}} \approx 0,78\,\mathrm{m}.$$

12. Leenan ja isän tulee asettua eri puolille tukipistettä eli laudan keskikohtaa. Olkoon isän etäisyys tukipisteestä x. Jotta lauta pysyy tasapainossa, on momenttien summan oltava nolla minkä tahansa laudan akselin suhteen eli $\Sigma M = 0.$ Silloin keskipisteen suhteen $M_{\mathrm{isä}} - M_{\mathrm{Leena}} = 0,$ josta saadaan $M_{\mathrm{isä}} = M_{\mathrm{Leena}}$ ja edelleen $G_{\mathrm{isä}} \cdot x = G_{\mathrm{Leena}} \cdot 3,0\,\mathrm{m}.$
Isän etäisyys tukipisteestä on

$$\begin{aligned} x &= \frac{G_{\mathrm{Leena}} \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{G_{\mathrm{isä}}} = \frac{m_{\mathrm{Leena}} g \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{m_{\mathrm{isä}} g} = \frac{m_{\mathrm{Leena}} \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{m_{\mathrm{isä}}} \\ &= \frac{30\,\mathrm{kg} \cdot 3,0\,\mathrm{m}}{80\,\mathrm{kg}} \\ &\approx 1,1\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Isän etäisyys Leenasta on silloin 1,1 m + 3,0 m = 4,1 m.

13. a) Momentti on

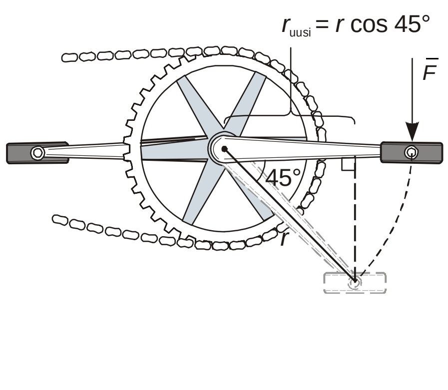
$$M = Fr = 35\,\mathrm{N} \cdot 0,17\,\mathrm{m} \approx 6,0\,\mathrm{Nm}.$$

b) Voiman vaikutussuoran etäisyys keskiöstä on nyt pienempi kuin a-kohdassa. Vääntövarren pituus on nyt

$$r_{\mathrm{uusi}} = 0,17\,\mathrm{m} \cdot \cos 45° = 0,1202\,\mathrm{m}.$$

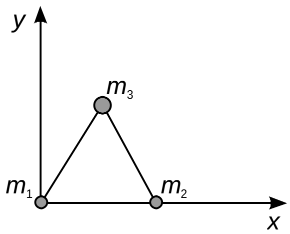
Momentti on

$$M = Fr_{\mathrm{uusi}} = 35\,\mathrm{N} \cdot 0,1202\,\mathrm{m} \approx 4,2\,\mathrm{Nm}.$$



14. a) Paksumman pään massa on suurempi. Painopiste ei ole keskellä karttakeppiä, vaan lähempänä paksua päätä. Painopisteestä tuettuna karttakeppi pysyy tasapainossa. Silloin kepin päiden momenttien summa on nolla tukipisteen suhteen. Lyhyempi eli paksumpi pää on raskaampi, koska tämän osan painovoima on suurempi ja vääntövarsi näin ollen pienempi. Pidemmän osan vääntövarsi on suurempi, joten sen painovoima on pienempi kuin lyhyemmän osan. Lyhyemmän osan massa on siis suurempi kuin pidemmän osan massa.

b)



Sijoitetaan koordinaatisto kuvan mukaisesti siten, että kuula m_1 sijaitsee origossa. Lasketaan ylimmän kappaleen paikka. Kolmion kaikki kulmat ovat $60°$. Ylimmän kappaleen x-koordinaatti on $\frac{140\,\text{cm}}{2} = 70\,\text{cm}$.

Yhtälöstä $\tan 60° = \frac{y}{70\,\text{cm}}$ saadaan y-koordinaatiksi

$$y = 70\,\text{cm} \cdot \tan 60° = 121{,}24\,\text{cm}.$$

Tällöin kuulien koordinaatit ovat

Kuula	Massa/kg	x/cm	y/cm
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,45	70	121,24

Massakeskipisteen paikan x-koordinaatti on

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1{,}2\,\text{kg} \cdot 0 + 2{,}5\,\text{kg} \cdot 140\,\text{cm} + 3{,}4\,5\,\text{kg} \cdot 70\,\text{cm}}{1{,}2\,\text{kg} + 2{,}5\,\text{kg} + 3{,}45\,\text{kg}} \\ &\approx 83\,\text{cm} \end{aligned}$$

ja y-koordinaatti

$$\begin{aligned} y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1{,}2\,\text{kg} \cdot 0 + 2{,}5\,\text{kg} \cdot 0 + 3{,}45\,\text{kg} \cdot 121{,}24\,\text{cm}}{1{,}2\,\text{kg} + 2{,}5\,\text{kg} + 3{,}45\,\text{kg}} \\ &\approx 59\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Massakeskipiste on tässä koordinaatistossa kohdassa (83 cm, 59 cm).

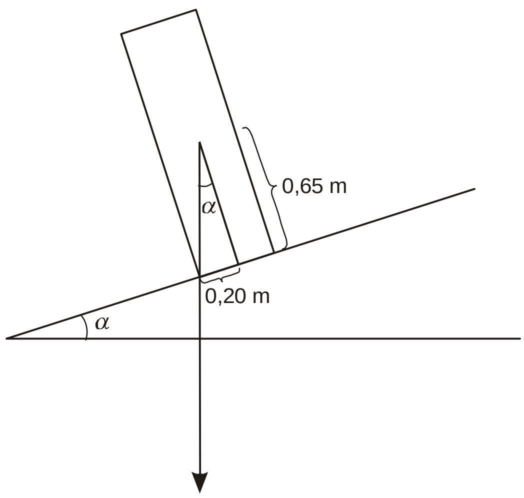
15. a) Ripusta kappale jostakin kohdasta. Kiinnitä luotilanka (lanka, jonka toisessa päässä on paino) ripustuspisteeseen ja piirrä luotilankaa käyttäen tästä pisteestä lähtien kappaleen pintaan suora viiva alas. Roikuta sitten kappaletta muistakin kohdista esimerkiksi kolme kertaa ja piirrä luotisuorat. Suorat leikkaavat kappaleen massakeskipisteen kohdalla.

b) Massakeskipisteen paikka pystysuunnassa on

$$y_0 = \frac{2{,}0\,\text{m}\cdot 80\,\text{kg} + 6{,}0\,\text{m}\cdot 60\,\text{kg} + 10\,\text{m}\cdot 40\,\text{kg}}{80\,\text{kg} + 60\,\text{kg} + 40\,\text{kg}} \approx 5{,}1\,\text{m}.$$

Massakeskipiste sijaitsee 5,1 m lipputangon tyvestä ylöspäin.

16.



Säiliö pysyy pystyssä, jos sen painopisteen kautta kulkeva luotisuora kulkee tukipinnan kautta. Rajatapauksessa saadaan yhtälö $\tan\alpha = \dfrac{0{,}20\,\text{m}}{0{,}65\,\text{m}}$, josta kaltevuuskulma on $\alpha \approx 17°$.

17. a) Yhden pyörähdyksen aikana voiman F_2 vaikutuspiste siirtyy matkan $2\pi r_2$. Voiman F_1 vaikutuspiste siirtyy matkan $(2\pi r_2 - 2\pi r_1)/2$ ylöspäin.
Vetotyö ja nostotyö ovat yhtä suuret, jolloin

$$W_2 = W_1 \text{ eli } F_2 \cdot 2\pi r_2 = F_1 \cdot \frac{2\pi r_2 - 2\pi r_1}{2},$$

josta saadaan

$$F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1.$$

Säteiden lähentyessä toisiaan, niiden erotus lähenee nollaa. Tällöin tarvittava vetovoima pienenee, jos kuorma pysyy samana. Differentiaalitaljalla voidaan nostaa sitä suurempi kuorma, mitä pienempi pyörien säteiden erotus on.

b) Tasapainoehdosta $F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1$ saadaan kuormaksi

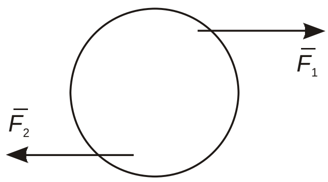
$$F_1 = \frac{F_2}{\frac{r_2 - r_1}{2r_2}} = \frac{850\,\text{N}}{\frac{22\,\text{cm} - 15\,\text{cm}}{2 \cdot 22\,\text{cm}}} \approx 5{,}3\,\text{kN}.$$

18. a) Kone on laite, jonka avulla voidaan muuttaa voiman suuruutta tai suuntaa (tai molempia) käyttäjän kannalta edullisemmaksi.

b) Vipuryhmän koneita ovat yksi- ja kaksivartiset vivut, väkipyörät ja vinssit. Kaltevan tason koneisiin kuuluu kaltevan tason lisäksi ruuvi ja kiila.

c) Kun kappaletta vedetään ylös kaltevaa tasoa pitkin, tarvittava voima on sitä pienempi, mitä loivempi taso on. Tällöin kappaletta pitää kuitenkin vetää pidempi matka kappaleen saamiseksi loppukorkeudelle *h*. Sanonnan ”mikä voimassa voitetaan, se matkassa menetetään” merkitys ilmenee hyvin myös jakoavainta käytettäessä: pidempivartisella avaimella tarvittava vääntövoima on pienempi, mutta avainta vääntävä käsi ”kulkee” pidemmän matkan.

19. a) Väite on väärin. Kappale on tasapainossa etenemisen suhteen, jos kokonaisvoima on nolla, ja pyörimisen suhteen, jos kokonaismomentti on nolla. Esimerkiksi kuvan tilanteessa kokonaisvoima on nolla, mutta silti voimat aiheuttavat kappaleeseen sitä kääntämään pyrkivän momentin.



b) Väite on väärin. Jos kokonaismomentti on nolla, niin kappale on levossa pyörimisen suhteen tai sitten se pyörii tasaisesti. Tällöin voiman momentti on yhtä suuri kuin vastusvoimien aiheuttama momentti. Jos esimerkiksi auton, polkupyörän tai junan pyörät pyörivät vakiona pysyvällä kulmanopeudella, pyörään kohdistuvien momenttien summa on nolla. Tällöin pyörimistä vastustavien voimien (laakereiden kitka ja vierimisvastus) momentti on yhtä suuri mutta vaikuttaa vastakkaiseen kiertosuuntaan kuin pyörimistä ylläpitävien voimien momentti. Kaltevalla pinnalla pyörimistä ylläpitävä voima on pinnasta pyörään kohdistuva kitkavoima.

20. Etenemisen suhteen lankku on tasapainossa, kun $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Silloin

$$\sum \overline{F}_y = \overline{0} \text{ ja } \sum \overline{F}_x = \overline{0}.$$

Voimien summa on pystysuunnassa

$$\overline{N}_2 + m_1\overline{g} + m_2\overline{g} = \overline{0}.$$

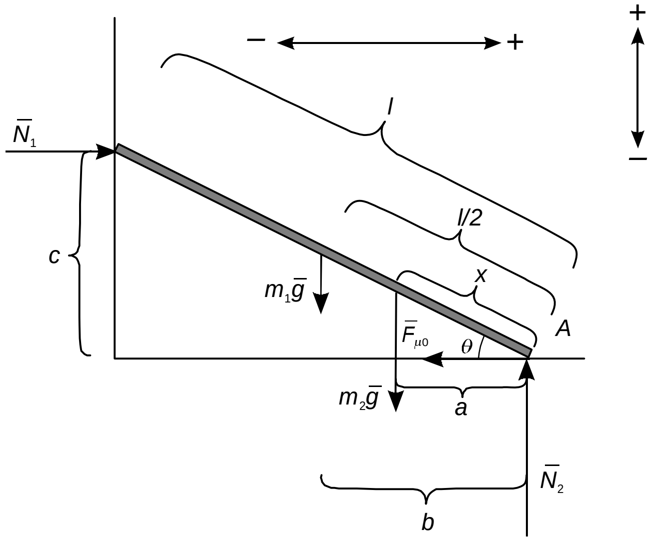
Sovitaan suunta ylöspäin positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä

$$N_2 - m_1 g - m_2 g = 0$$

saadaan tukivoimaksi

$$N_2 = m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2)g = 37{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = 367{,}875\,\mathrm{N}.$$



Voimien summa vaakasuunnassa on $\bar{N}_1 + \bar{F}_{\mu 0} = \bar{0}$.

Sovitaan suunta oikealle positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $N_1 - F_{\mu 0} = 0$ saadaan tukivoimaksi

$$N_1 = F_{\mu 0} = \mu_0 N_2 = 0{,}80 \cdot 367{,}875\,\mathrm{N} = 294{,}3\,\mathrm{N}.$$

Pojan kävelymatka on x. Lasketaan etäisyydet a, b ja c:

$$\cos\theta = \frac{a}{x}, \text{ jolloin } a = x\cos\theta.$$

$$\cos\theta = \frac{b}{l/2}, \text{ jolloin } b = \frac{l}{2}\cos\theta.$$

$$\sin\theta = \frac{c}{l}, \text{ jolloin } c = l\sin\theta.$$

Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla minkä tahansa akselin suhteen.

Valitaan momenttiakseliksi A.

Silloin

$$\sum M_A = 0 \text{ eli } -N_1 \cdot c + m_1 g \cdot b + m_2 g \cdot a = 0.$$

Sijoittamalla etäisyyksien lausekkeet saadaan

$$-N_1 \cdot l\sin\theta + m_1 g \cdot \frac{l}{2}\cos\theta + m_2 g \cdot x\cos\theta = 0.$$

Pojan kävelymatka on

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{N_1 \cdot l \sin\theta - m_1 g \cdot \frac{l}{2}\cos\theta}{m_2 g \cdot \cos\theta} \\
&= \frac{294{,}3\,\mathrm{N} \cdot 4{,}5\,\mathrm{m} \cdot \sin 29^\circ - 16{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}25\,\mathrm{m} \cdot \cos 29^\circ}{21\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot \cos 29^\circ} \\
&\approx 1{,}8\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

21. a) Kiertymän suuruus radiaaneina on

$$175^\circ = 175 \cdot \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \approx 3{,}1\,\mathrm{rad}.$$

b) Kiertymän suuruus asteina on

$$15\,\mathrm{rad} = 15 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 860^\circ.$$

22. a) Pulsarin kierrosaika on

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{642\frac{1}{\mathrm{s}}} \approx 1{,}6\,\mathrm{ms}.$$

Kulmanopeus on

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 642\frac{1}{\mathrm{s}} \approx 4030\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}.$$

b) Kaikki sellainen liike, jossa kappaleen asento muuttuu eli kappale kääntyy, on pyörimistä.
Maa pyörii akselinsa ympäri kerran vuorokaudessa. Muutkin planeetat pyörivät akselinsa ympäri.
Aurinkokin pyörii akselinsa ympäri, mikä on voitu todeta esimerkiksi auringonpilkkujen liikettä seuraamalla.

23. a) Akselin kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{4{,}3\,\mathrm{rad/s} - 0{,}52\,\mathrm{rad/s}}{2{,}4\,\mathrm{s}} \approx 1{,}6\,\mathrm{rad/s^2}.$$

b) Kiihdytyksen aikana kiertokulma on

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0{,}52\,\mathrm{rad/s} \cdot 2{,}4\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}575\,\mathrm{rad/s^2} \cdot (2{,}4\,\mathrm{s})^2 \approx 5{,}8\,\mathrm{rad}.$$

Kiertymän suuruus asteina on

$$5{,}784\,\mathrm{rad} = 5{,}784 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 330^\circ.$$

24. a) Auton kulmanopeus kaarreajossa on

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\frac{110}{3,6}\,\mathrm{m/s}}{53\,\mathrm{m}} \approx 0,58\,\mathrm{rad/s}.$$

b) Vakiovauhdilla ympyräradalla liikkuvan auton liikeyhtälö on $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}_\mathrm{n}$.

Skalaarisuureena normaalikiihtyvyys $a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r}$, joten voiman suuruus on

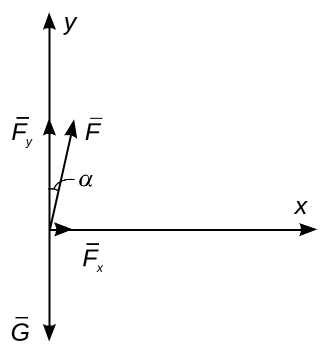
$$F = m\frac{v^2}{r} = 1050\,\mathrm{kg}\cdot\frac{\left(\frac{110}{3,6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{53\,\mathrm{m}} \approx 18\,\mathrm{kN}.$$

c) Auton pitää tiellä lepokitka auton renkaiden ja tienpinnan välillä. Jos kitka on liian pieni, auto suistuu tieltä. Jos auto lähtee liukumaan, kyseessä ei ole enää lepokitka, vaan lepokitka on muuttunut liukukitkaksi.

d) Vaikka auton ratavauhti on vakio, nopeuden suunta kuitenkin muuttuu koko ajan. Autolla on normaalikiihtyvyyttä

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{110}{3,6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{53\,\mathrm{m}} \approx 18\,\mathrm{m/s^2}.$$

25.



Linnun ratanopeus ympyräradalla on

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 15\,\mathrm{m}}{16\,\mathrm{s}} \approx 5,89\,\mathrm{m/s}.$$

Tasaisessa ympyräliikkeessä olevan lokin normaalikiihtyvyys on

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(5,89\,\mathrm{m/s})^2}{15\,\mathrm{m}} \approx 2,31\,\mathrm{m/s^2}.$$

Voima, joka aiheuttaa normaalikiihtyvyyden ja pakottaa linnun ympyräradalle, saadaan Newtonin II laista $\sum\bar{F} = m\bar{a}$. Linnun liikeyhtälö vaakasuunnassa on $\sum\bar{F}_x = m\bar{a}_x$.

Voiman suuruus vaakasuunnassa saadaan skalaariyhtälöstä

$$F_x = ma_n = 0{,}32\,\text{kg}\cdot 2{,}31\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}739\,\text{N}.$$

Linnun liikeyhtälö pystysuunnassa on $\sum \overline{F}_y = m\overline{a}_y$. Linnulla ei ole kiihtyvyyttä pystysuunnassa, joten $\overline{a}_y = \overline{0}$. Kun valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi, skalaariyhtälöstä $F_y - G = 0$ saadaan

$$F_y = G = mg = 0{,}32\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 3{,}14\,\text{N}.$$

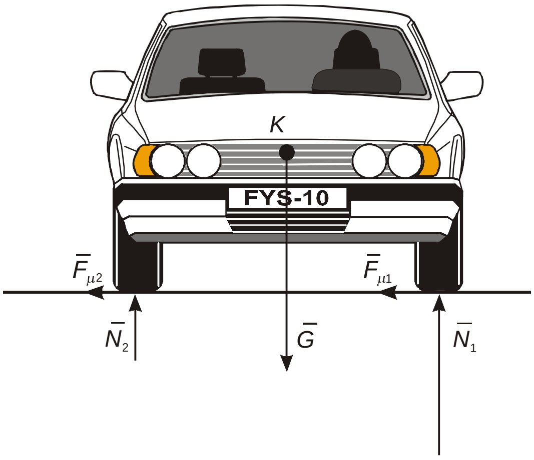
Nostovoima on

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(0{,}739\,\text{N})^2 + (3{,}14\,\text{N})^2} \approx 3{,}2\,\text{N}.$$

Lasketaan voiman suuntakulma pystytasoon nähden:

$$\tan\alpha = \frac{F_x}{F_y} = \frac{0{,}74\,\text{N}}{3{,}14\,\text{N}},\ \text{josta}\ \alpha \approx 13°.$$

26. Kaarteen säde on r = 80 m, $F_{\mu 1}$ kitka ulkokaarteen puolella (molemmat pyörät), $F_{\mu 2}$ kitka sisäkaarteen puolella (molemmat pyörät), N_1 tien tukivoima ulkokaarteen puolella (molemmat pyörät) ja N_2 tien tukivoima sisäkaarteen puolella (molemmat pyörät). Auton massa on m = 1000 kg ja auton vauhti on v = 80 km/h. Kitkakerroin ulkokaarteen puolella on μ_1 = 0,50 ja sisäkaarteen puolella μ_2 = 0,80.



Kitka pakottaa auton ympyräradalle. Auton liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\text{n}$. Säteen suunnassa vaikuttavien voimien vektorisumma koostuu kahdesta kitkavoimasta: $\overline{F}_{\mu 1} + \overline{F}_{\mu 2} = m\overline{a}_\text{n}$.

Kokonaisvoiman suuruus saadaan skalaariyhtälöstä

$$(1)\ \Sigma F = F_{\mu 1} + F_{\mu 2} = ma_\text{n} = m\frac{v^2}{r} = 1000\,\text{kg}\cdot\frac{(\frac{80}{3{,}6}\,\text{m/s})^2}{80\,\text{m}} \approx 6172{,}8\,\text{N}.$$

Normaalikiihtyvyys ympyräradan keskipistettä kohti on

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\frac{80}{3,6}\,\mathrm{m/s})^2}{80\,\mathrm{m}} = 6,173\,\mathrm{m/s^2}.$$

Tällöin on oletettava myös, että auto ei kaadu. Tästä ehdosta saadaan momenttiyhtälö painopisteen K suhteen: akselin K suhteen laskettujen momenttien summa on nolla eli

$$(2)\ \Sigma M_K = F_{\mu 1} r_2 + F_{\mu 2} r_2 + N_2 r_1 - N_1 r_1 = 0,$$

jossa r_1 = 0,70 m on auton leveyden puolikas ja r_2 = 0,60 m on painopisteen etäisyys maanpinnasta. Kiertosuunta myötäpäivään on valittu positiiviseksi.
Auto on tasapainossa y-suunnassa, joten $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$ eli skalaarimuodossa

$$(3)\ \Sigma F_y = 0.$$

Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, on

$$(4)\ N_1 + N_2 - G = 0.$$

Ratkaistaan ensin tukivoima N_2:

$$(2)\ (F_{\mu 1} + F_{\mu 2}) r_2 + N_2 r_1 - N_1 r_1 = 0,$$

johon sijoitetaan (1):n ja (4):n mukaan saadut lausekkeet

$$F_{\mu 1} + F_{\mu 2} = m\frac{v^2}{r} \text{ ja } N_1 = G - N_2.$$

Sijoituksen jälkeen saadaan tukivoimaksi

$$N_2 = \frac{G r_1 - \frac{m v^2}{r} r_2}{2 r_1}$$

$$= \frac{1000\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0,70\,\mathrm{m} - \frac{1000\,\mathrm{kg} \cdot (\frac{80}{3,6}\,\mathrm{m/s})^2}{80\,\mathrm{m}} \cdot 0,60\,\mathrm{m}}{2 \cdot 0,70\,\mathrm{m}}$$

= 2259,5 N.

Koska tämä voima N_2 on arvoltaan positiivinen, alussa tehty olettamus ”auto ei kaadu” pitää paikkansa. Toinen tukivoima on

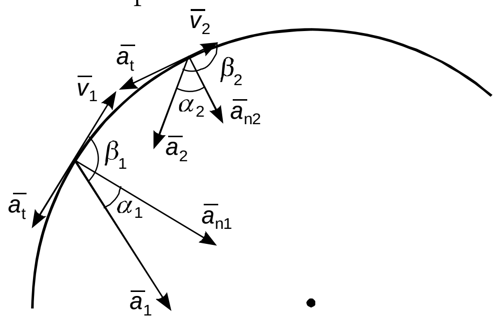
$$N_1 = 1000\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} - 2259,5\,\mathrm{N} = 7550,5\ \mathrm{N}.$$

Pyörien ja tienpinnan välinen yhteinen kitka on

$$F_\mu = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = 0,50 \cdot 7550,5\,\mathrm{N} + 0,80 \cdot 2259,5\,\mathrm{N} = 5582,9\,\mathrm{N} \approx 5600\,\mathrm{N}.$$

Yhtälön (1) yhteydessä laskettu ympyräradalla pysymiseen tarvittava voima on 6172,8 N ≈ 6200 N, joka on suurempi kuin kitka annetussa tilanteessa. Huomataan, että auto suistuu tieltä.

27. Veturin liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$ eli skalaarimuodossa $F = ma_\mathrm{n}$, jossa normaalikiihtyvyys on $a_\mathrm{n} = m\dfrac{v^2}{r}$. Ympyräradalla liikkuvalla kappaleella on aina normaalikiihtyvyyttä a_n. Lisäksi kappaleella on tangenttikiihtyvyyttä a_t, mikäli sen ratanopeus muuttuu. Kuviossa veturi liikkuu myötäpäivään.



Alkutilanne:
Alussa veturin normaalikiihtyvyys on

$$a_{\mathrm{n}1} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\frac{95}{3{,}6}\,\mathrm{m/s})^2}{540\,\mathrm{m}} = 1{,}29\,\mathrm{m/s^2}$$

ja tangenttikiihtyvyys

$$a_t = \frac{\Delta v}{t} = \frac{\frac{60}{3{,}6}\,\mathrm{m/s} - \frac{95}{3{,}6}\,\mathrm{m/s}}{11\,\mathrm{s}} = -0{,}884\,\mathrm{m/s^2}.$$

Kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyden ja tangenttikiihtyvyyden vektorisumma. Veturin kiihtyvyyden suuruus alussa on

$$a_1 = \sqrt{a_t^2 + a_{n1}^2} = \sqrt{(-0{,}884\,\mathrm{m/s^2})^2 + (1{,}29\,\mathrm{m/s^2})^2} \approx 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}.$$

Lasketaan kiihtyvyyden ja ympyräradan säteen välinen kulma:

$$\tan\alpha_1 = \left|\frac{a_t}{a_{n1}}\right| = \left|\frac{-0{,}884\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}29\,\mathrm{m/s^2}}\right|,$$

josta saadaan $\alpha_1 = 34{,}4°$.
Nopeuden ja kiihtyvyyden välinen kulma on

$$\beta_1 = 90° + \alpha_1 = 90° + 34{,}4° \approx 124°.$$

Lopputilanne:
Lopussa veturin normaalikiihtyvyys on

$$a_{n2} = \frac{v^2}{r} = \frac{(\frac{60}{3,6}\,\mathrm{m/s})^2}{540\,\mathrm{m}} = 0,514\,\mathrm{m/s^2}$$

ja tangenttikiihtyvyys yhtä suuri kuin alkutilanteessakin:

$$a_t = \frac{\Delta v}{t} = \frac{\frac{60}{3,6}\,\mathrm{m/s} - \frac{95}{3,6}\,\mathrm{m/s}}{11\ \mathrm{s}} = -0,884\,\mathrm{m/s^2}.$$

Lasketaan kiihtyvyyden ja ympyräradan säteen välinen kulma:

$$\tan\alpha_2 = \left|\frac{a_\mathrm{t}}{a_{\mathrm{n}2}}\right| = \left|\frac{-0,884\,\mathrm{m/s^2}}{0,514\,\mathrm{m/s^2}}\right|, \text{ josta saadaan } \alpha_2 \approx 59,8°.$$

Veturin kiihtyvyys lopussa on

$$a_2 = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_{\mathrm{n}2}^2} = \sqrt{(-0,884\,\mathrm{m/s^2})^2 + (0,514\,\mathrm{m/s^2})^2} \approx 1,0\,\mathrm{m/s^2}.$$

Nopeuden ja kiihtyvyyden välinen kulma on

$$\beta_2 = 90° + \alpha_2 = 90° + 59,8° \approx 150°.$$

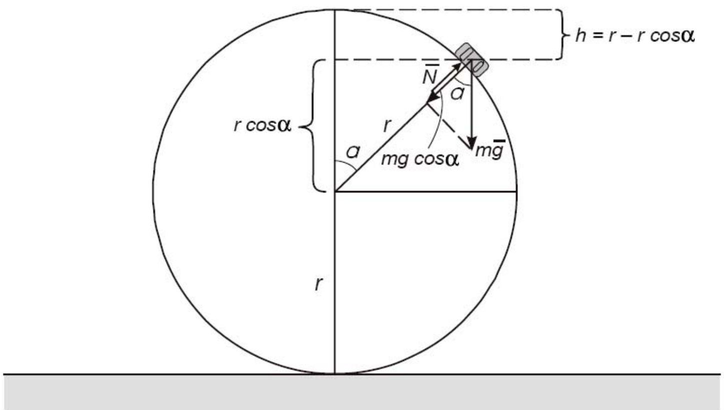
28. Kukan liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Säteen suunnassa vaikuttava kokonaisvoima muodostuu ainoastaan kitkavoimasta $\overline{F}_\mu = \mu\overline{N}$. Se pakottaa kukan ympyräradalle. Kukan kiihtyvyys on normaalikiihtyvyyden ja tangenttikiihtyvyyden vektorisumma: $\overline{a} = \overline{a}_\mathrm{n} + \overline{a}_\mathrm{t}$. Sovitaan suunta keskipistettä kohti positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $F_\mu = ma$ eli $\mu N = m\sqrt{{a_\mathrm{n}}^2 + {a_\mathrm{t}}^2}$
ratkaistaan kitkakerroin:

$$\mu mg = m\sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + (\alpha r)^2}\ ,$$

josta

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{m\sqrt{\left(\frac{(\omega r)^2}{r}\right)^2 + \alpha^2 r^2}}{mg} \\
&= \frac{\sqrt{(\omega^2 r)^2 + \alpha^2 r^2}}{g} \\
&= \frac{\sqrt{((\alpha t)^2 r)^2 + \alpha^2 r^2}}{g} \\
&= \frac{\sqrt{\alpha^4\ t^4 r^2 + \alpha^2 r^2}}{g}.
\end{aligned}$$

29.



Koska kappale liukuu kitkatta *r*-säteisen pallo pintaa alaspäin, voidaan soveltaa mekaanisen energian säilymislakia. Painovoima tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi, jolloin saadaan yhtälö $mgh = \frac{1}{2}mv^2$.

Irtoamishetkellä kappale on pudonnut pystysuunnassa matkan $h = r - r\cos\alpha$. Sijoittamalla $h = r - r\cos\alpha$ edelliseen yhtälöön saadaan

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(r - r\cos\alpha),$$

josta nopeuden neliö

$$v^2 = 2gr(1-\cos\alpha).$$

Kun kappale liukuu pallopinnalla, säteen suunnassa vaikuttavat painon $\overline{G} = m\overline{g}$ säteen suuntainen komponentti pallon keskipistettä kohti ja pinnan tukivoima pallon pinnasta kappaleeseen. Kappaleen liikeyhtälö on $\overline{G}_\mathrm{r} + \overline{N} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Sovitaan suunta pallon keskipistettä kohti positiiviseksi.
Sijoitetaan skalaariyhtälöön

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{r}$$

nopeuden neliön yhtälö ja otetaan huomioon, että kappaleen irtoamishetkellä tukivoima $N = 0$.
Saadaan yhtälö

$$mg\cos\alpha = m\frac{2gr(1-\cos\alpha)}{r} \text{ eli } \cos\alpha = 2(1-\cos\alpha),$$

josta $\cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha$ ja edelleen $3\cos\alpha = 2$.

Yhtälöstä $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ saadaan kulmaksi $\alpha \approx 48{,}2°$.

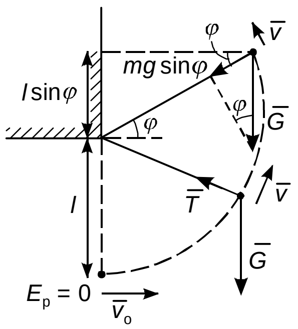
Esineen irtoamiskorkeus pallon alareunasta mitattuna on

$$r + r\cos\alpha = r + r\cos 48{,}2° \approx 1{,}67r.$$

30. Palloon vaikuttavat heilahduksen aikana langan jännitysvoima $\overline{T}$ ja painovoima $\overline{G}$. Ilmanvastus on pieni, koska pallo on pieni. Pallon liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Valitaan suunnat alaspäin ja kohti radan keskipistettä positiivisiksi. Pallo alkaa poiketa ympyräradalta, kun jännitysvoima $T = 0$. Tällöin kulma on $\varphi = 125° - 90° = 35°$.
Näin ollen on

$$0 + G_x = ma_{\mathrm{n}} \text{ eli } mg\sin\varphi = m\frac{v^2}{l}.$$

Pallon nopeuden neliölle saadaan yhtälö $v^2 = gl\sin\varphi$. Kun pallo alkaa poiketa ympyräradalta, se on noussut korkeudelle $h = l + l\sin\varphi$. Alussa pallolla oli liike-energiaa ja lopussa liike-energiaa ja potentiaalienergiaa. Ympyräradalta poikkeamisen hetkellä pallolla on vielä nopeutta ja siksi potentiaalienergian lisäksi liike-energiaa. Painovoima tekee työtä palloon ja muuntaa liike-energiaa osittain potentiaalienergiaksi.



Mekaanisen energian säilymislain mukaan on $\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$.
Sijoittamalla tähän yhtälöön nopeuden neliön ja nousukorkeuden lausekkeet saadaan

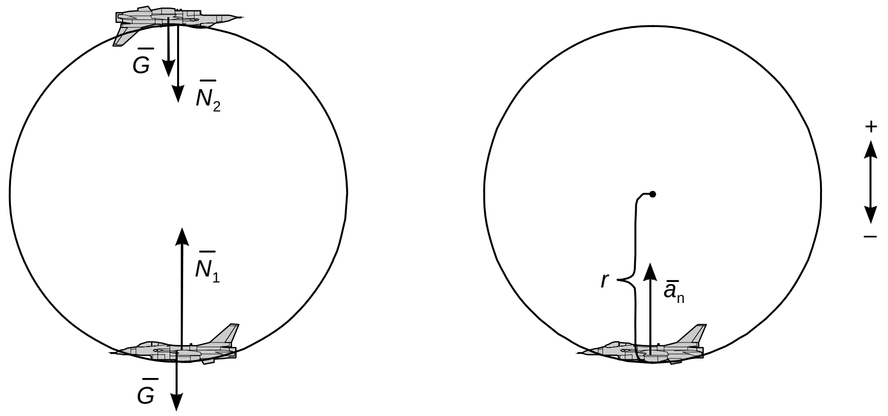
$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \frac{1}{2}m(gl\sin\varphi) + mg(l + l\sin\varphi) \quad \Big| \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_0{}^2 = gl\sin\varphi + 2gl + 2gl\sin\varphi = 3gl\sin\varphi + 2gl = gl(3\sin\varphi + 2).$$

Pallon lähtönopeudeksi saadaan

$$v_0 = \sqrt{gl(3\sin\varphi + 2)} = \sqrt{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}85\,\mathrm{m}(3\sin 35° + 2)} \approx 5{,}6\,\mathrm{m/s}.$$

31. a) Voidaan olettaa, että ympyräliike on kysytyillä hetkillä tasaista. Silloin tangenttikiihtyvyys on nolla. Lentäjään vaikuttavat voimat ovat painovoima $\overline{G}$ ja penkistä lentäjään kohdistuva tukivoima $\overline{N}$.



b) Tarkastellaan lentäjään kohdistuvia voimia. Lentäjän pakottaa ympyräradalle säteen suunnassa vaikuttavien voimien vektorisumma, joka aiheuttaa normaalikiihtyvyyden. Lentäjän liikeyhtälö on
$\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Sovitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Ratkaistaan skalaariyhtälöstä

$$N - G = ma_{\mathrm{n}} \text{ tukivoima: } N = ma_{\mathrm{n}} + G = m\frac{v^2}{r} + G.$$

Tukivoiman suuruudella on raja, jonka mukaan $N \leq 9G$ eli $m\frac{v^2}{r} + mg \leq 9mg$, josta

$$\frac{v^2}{r} + g \leq 9g \text{ eli } \frac{v^2}{r} \leq 8g.$$

Säteen suuruudelle saadaan ehto:

$$r \geq \frac{v^2}{8g} = \frac{\left(\frac{1500}{3,6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{8 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 2,2\,\mathrm{km}.$$

32. a) Napakelkan ratanopeus on $v = \frac{2\pi r}{T}$, josta saadaan kierrosaika

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4,5\,\mathrm{m}}{2,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 11\,\mathrm{s}.$$

b) Kierrostaajuus on

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{11,3\,\mathrm{s}} \approx 0,088\,\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}.$$

c) Newtonin I lain mukaan kelkka jatkaa suoraviivaisesti liikettään radan tangentin suuntaan. Kelkan nopeus pysyisi vakiona, jos liikevastuksia ei olisi.

33. a) Pyörän säde on r = 4,25 cm, joten sen pyörähtäessä yhden kierroksen hiihtäjä etenee matkan $s = 2\pi r.$ Lenkin aikana kierroksia tulee

$$\frac{10\,000\,\text{m}}{2\pi\cdot 0{,}0425\,\text{m}} \approx 37\,000.$$

b) Renkaan kulmanopeus on

$$\omega = 2\pi n = 2\pi\cdot 2{,}5\,\text{rad/s} = 5\pi\,\text{rad/s} \approx 15{,}7\,\text{rad/s}.$$

Kiertymä on

$$\varphi = \omega t = 5\pi\,\text{rad/s}\cdot 6\cdot 60\,\text{s} \approx 5655\,\text{rad}.$$

Pyöräilijän pyöräilemä matka on

$$s = \varphi r = 5655\,\text{rad}\cdot 0{,}34\,\text{m} \approx 1{,}9\,\text{km}.$$

Rengas pyörähtää kokonaisia kierroksia

$$\frac{5655\,\text{rad}}{2\pi} \approx 900 \text{ kpl.}$$

34. a) Koska kiekot on yhdistetty luistamattomalla hihnalla toisiinsa, niiden ratanopeudet ovat yhtä suuret:

$$v_1 = v_2 \text{ eli } \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \text{ josta saadaan } \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Koska säteiden suhde on

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{8{,}0\,\text{cm}}{20\,\text{cm}} = \frac{2}{5},$$

on kulmanopeuksien suhde joka hetkellä 5 : 2 (= 2,5 : 1).

b) Kun pienemmän kiekon kierrostaajuus on 5,0 r/s, sen kulmanopeus on

$$\omega_1 = 2\pi\cdot 5{,}0\,\text{rad/s} \approx 31{,}42\,\text{rad/s}.$$

Isomman kiekon kulmanopeus on

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{2}{5}\cdot 31{,}42\,\text{rad/s} \approx 12{,}57\,\text{rad/s}.$$

Tämän kulmanopeuden saavuttamiseen kuluu aikaa kiihdyttämisen alusta lukien

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{12{,}57\,\text{rad/s}}{1{,}25\,\text{rad/s}^2} \approx 10\,\text{s}.$$

35. a) Hitausmomentti on $J = \frac{ml^2}{12}$, josta saadaan pituudeksi

$$l = \sqrt{\frac{12J}{m}} = \sqrt{\frac{12\cdot 1{,}2\,\text{kgm}^2}{0{,}250\,\text{kg}}} \approx 7{,}6\,\text{m}.$$

b) Sauvan hitausmomentti muuttuu pyörimisakselin paikan muuttuessa. Esimerkiksi toisen pään ympäri pyöriessään sauvan hitausmomentti on suurempi kuin a-kohdassa ($J = \frac{1}{3}ml^2$).

c) Hitausmomentti kuvaa kappaleen kykyä vastustaa pyörimisen muutoksia, ts. hitausmomentti kuvaa kappaleen pyörimisen hitautta. Kappaleen pyörimisen hitaus vaikuttaa levossa olevan kappaleen pyörimään saattamiseen sekä yhtä lailla jo pyörivän kappaleen kulmanopeuden muuttamiseen eli kiihdyttämiseen tai jarruttamiseen.

36. Sauvan pää liikkuu pitkin ympyrärataa, jonka säde on l = 0,52 m. Pään ratanopeus on $v = \omega l$. Painovoima tekee työtä ja muuntaa sauvan potentiaalienergiaa pyörimisenergiaksi, koska sauva pääsee pyörimään toisen päänsä kautta kulkevan akselin ympäri. Sauvan massakeskipisteen korkeuden muutos on $l/2$. Ratkaistaan sauvan kulmanopeus lopputilanteessa yhtälöstä

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mg\frac{l}{2} \text{ eli } \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2}\text{, josta saadaan } \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Sauvan vapaan pään nopeus on

$$v = \omega l = \sqrt{\frac{3g}{l}}\cdot l = \sqrt{3gl} = \sqrt{3\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 0{,}52\,\text{m}} \approx 3{,}9\,\text{m/s}.$$

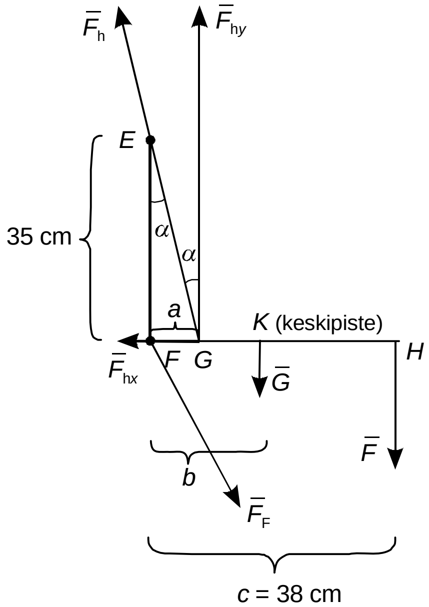
37. Momentti, joka vaikuttaa keskeltä akseloituun umpinaiseen tankoon on $M = Fr$. Toisaalta pyörimisen liikeyhtälö on $M = J\alpha$. Kirjoitetaan yhtälö $Fr = J\alpha$ muotoon

$$Fr = \frac{1}{2}mr^2\alpha,$$

josta saadaan kulmakiihtyvyydeksi

$$\alpha = \frac{Fr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{42\,\text{N}\cdot 0{,}012\,\text{m}}{\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\,\text{kg}\cdot(0{,}012\,\text{m})^2} = 2800\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

38. Tarkastellaan käsivartta FH staattisessa kuormituksessa. Valitaan momenttipisteeksi F, jolloin tässä pisteessä käsivarteen FH vaikuttavaa olkaluun EF tukivoimaa $\overline{F}_F$ ei tarvita momenttiyhtälössä.



$\overline{F}_\text{h}$ on hauislihaksen tukivoima.

$\overline{G}$ on käsivarren paino.

$\overline{F}$ on kuorman paino.

Käsi on tasapainossa pyörimisen suhteen, jolloin momenttiehtoa voi käyttää. Voimakuvion avulla saadaan momenttiyhtälö ($FG = a$, $FK = b$ ja $FH = c$)

$$\sum M_\text{F} = F_\text{hy}a - Gb - Fc = 0.$$

Voimaksi F_hy saadaan $F_\text{hy} = \dfrac{Gb + Fc}{a}$. Yhtälöstä nähdään, että mitä suurempi on kyynärnivelen ja hauislihaksen kiinnittymiskohdan väli a, sitä pienemmällä voimalla hauislihas pystyy tukemaan kuormaa $\overline{F}$. Käsi 2 on siis vahvempi.

Lasketaan kulmakiihtyvyys liikeyhtälöstä, joka pätee kiihtyvässä pyörimisliikkeessä olevalle kappaleelle:

$$\sum M_\text{F} = F_\text{hy}a - Gb = J\alpha,$$

jossa J on käsivarren hitausmomentti $J = \frac{1}{3}mc^2$, $m = 1{,}9$ kg on käsivarren massa ja $c = 0{,}38$ m käsivarren pituus. Kulmakiihtyvyydeksi kyynärnivelen F ympäri saadaan

$$\alpha = \frac{F_\text{hy}a - Gb}{\frac{1}{3}mc^2},$$

jossa $G = mg$ ja $b = c/2$ sekä

$$F_{hy} = F_h \cos\alpha = 160\,\mathrm{N} \cdot \frac{0,38\,\mathrm{m}}{\sqrt{(0,38\,\mathrm{m})^2 + (0,035\,\mathrm{m})^2}} = 159,3\,\mathrm{N}.$$

Kulmakiihtyvyys on

$$\alpha = \frac{F_{hy}a - Gb}{\frac{1}{3}mc^2} = \frac{F_{hy}a - mg\cdot\frac{c}{2}}{\frac{1}{3}mc^2}$$

$$= \frac{159{,}3\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m/s^2}}\cdot 0{,}035\,\mathrm{m} - 1{,}9\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\frac{0{,}38\,\mathrm{m}}{2}}{\frac{1}{3}\cdot 1{,}9\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}38\,\mathrm{m})^2} \approx 22\,\mathrm{rad/s^2}.$$

Huom.! Käsien nopeutta ei voida vertailla edellisen kaltaisen voimalaskun avulla, mutta tätä ei tehtävässä kysyttykään.

39. Koska liikevastusvoimia voidaan pitää vähäisinä, sovelletaan mekaanisen energian säilymislakia. Painovoima tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike- ja rotaatioenergiaksi:

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2,$$

josta saadaan

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{4}mv^2.$$

Ratkaistaan loppunopeus, jolloin saadaan

$$v = \sqrt{\frac{2m_1gh}{m_1 + \frac{1}{2}m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 120\,\mathrm{kg}\cdot 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot 1,7\,\mathrm{m}}{120\,\mathrm{kg} + \frac{1}{2}\cdot 75\,\mathrm{kg}}} \approx 5,0\,\mathrm{m/s}.$$

40. Sovitaan ämpärin potentiaalienergian nollataso ämpärin ala-asemaan. Pudonneella ämpärillä ei ole potentiaalienergiaa lopussa mutta on liike-energiaa. Osa alussa olleesta potentiaalienergiasta kuluu liikevastusten voittamiseen. Työperiaatteen mukaan systeemiin tehty työ on yhtä suuri kuin systeemin energian muutos. $W = \Delta E$ eli kitkatyö $W_\mu = E_p^a - E_k^l$, josta $E_p^a = W_\mu + E_k^l$ eli ämpärin potentiaalienergian muutos on yhtä suuri kuin kitkamomenttia vastaan tehdyn työn ja systeemin liike-energian summa lopussa. Systeemillä on myös pyörimisenergiaa, ja kitkatyö on

$$W_\mu = F_\mu \cdot \Delta s = \frac{M_\mu}{r}\cdot r\Delta\varphi = M_\mu\Delta\varphi.$$

Oletetaan, että köysi ei veny eikä liu'u, jolloin

$$mgh = W_{\mu} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

jossa h on pudotuskorkeus.

Kulmanopeus on $\omega = \frac{v}{r}$ ja kiertymä

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot \frac{h}{p} = 2\pi \cdot \frac{h}{2\pi r} = \frac{h}{r},$$

jolloin

$$mgh = M_{\mu}\Delta\varphi + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$mgh - M_{\mu}\frac{h}{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2}$$

$$h(mg - \frac{M_{\mu}}{r}) = \frac{1}{2}v^2(m + \frac{J}{r^2}).$$

Ratkaistaan yhtälöstä nopeus:

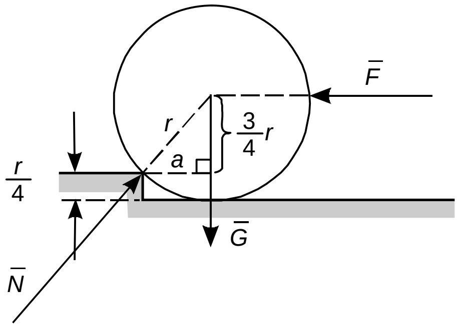
$$v^2 = \frac{2h(mg - \frac{M_{\mu}}{r})}{m + \frac{J}{r^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2h\left(mg - \frac{M_{\mu}}{r}\right)}{m + \frac{J}{r^2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2\,\mathrm{m}\left(12\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - \frac{1{,}4\,\mathrm{Nm}}{0{,}090\,\mathrm{m}}\right)}{12\,\mathrm{kg} + \frac{0{,}028\,\mathrm{kgm^2}}{(0{,}090\,\mathrm{m})^2}}} \approx 6{,}5\,\mathrm{m/s}.$$

41. a) Karuselli ja lapset muodostavat systeemin, jonka hitausmomentti pienenee, koska massa pysyy samana, mutta sijoittuu lähemmäksi pyörimisakselia. Koska pyörimismäärä säilyy, systeemin kulmanopeus suurenee.

b) Vastaavasti kun lapsi siirtyy ulkokehälle, kulmanopeus pienenee.

42. a) Valitaan momenttipisteeksi korokkeen reuna. Kappaletta pyrkivät kääntämään painovoima ja työntövoima.



Pythagoraan lauseen mukaisesti on

$$a^2 + (\frac{3}{4}r)^2 = r^2, \text{ jolloin } a^2 + (\frac{3}{4}r)^2 = r^2.$$

Sivun a pituus on $a = \frac{\sqrt{7}}{4} r \approx 0,661r.$ Kun tynnyri lähtee nousemaan korokkeelle, tynnyri irtoaa alustasta, jolloin tukivoima alustasta tynnyriin on nolla. Tynnyri on tasapainossa, joten momenttien summa minkä tahansa akselin suhteen on nolla. Kulmakohdan suhteen $F \cdot x - G \cdot a = 0$, josta $F \cdot x = G \cdot a$.
Vaakasuoran voiman suuruus on

$$F = \frac{Ga}{x} = \frac{120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} r}{\frac{3}{4} r} \approx 1{,}0\,\text{kN}.$$

b) Voiman yhtälöstä säde supistuu pois, joten säteellä ei ole merkitystä tarvittavan voiman suuruuteen tätä mallia käytettäessä.

43. Pallon vierimistä alaspäin voidaan tarkastella käyttäen mekaanisen energian säilymislakia, kun ilmanvastus ja myös vierimisvastus on vähäinen. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi pallon alustasta irtoamisen taso. Pallon vieriessä liukumatta alas painovoima tekee työtä ja muuntaa pallon potentiaalienergiaa translaatioenergiaksi ja kitkamomentti potentiaalienergiaa rotaatioenergiaksi. Vierimisen loppuvaiheessa pallon siirtyessä alimmasta pisteestä nollatasolle vastaavasti rotaatio- ja translaatioenergiaa muuntuu potentiaalienergiaksi. (Potentiaalienergia siis muuttuu negatiivisesta nollaksi.)

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Sijoitetaan $J = \frac{1}{2}J\omega$ ja $v = \omega r$ sekä $h = 0$.

Nopeus potentiaalienergian nollatasolla on

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1}.$$

Pallon irrottua alustasta painovoima muuntaa translaatioenergiaa potentiaalienergiaksi.
Yhtälöstä

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_2$$

saadaan loppunopeudeksi

$$h_2 = \frac{\frac{1}{2}v^2}{g} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{7}gh_1}{g} = \frac{5}{7}h_1 = \frac{5}{7}\cdot 0,95\,\mathrm{m} \approx 0,68\,\mathrm{m}.$$

44. a) Autot vetävät toisiaan puoleensa voimalla

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67259\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot\frac{1200\,\mathrm{kg}\cdot 1600\,\mathrm{kg}}{(2,5\,\mathrm{m})^2} \approx 2,0\cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}.$$

Molemmat autot vetävät toisiaan puoleensa yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla (Newtonin III laki).

b) Satelliitin liikeyhtälö on $\sum\overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Gravitaatiovoima pakottaa satelliitin ympyräradalle. Valitaan suunta keskipistettä kohti positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$$\gamma\frac{m_{\mathrm{sat}} m_{\mathrm{Maa}}}{(2R)^2} = m_{\mathrm{sat}}\frac{v^2}{2R},$$ jossa R on Maan säde.

Nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma m_{\mathrm{Maa}}}{2R}} = \sqrt{\frac{6,67259\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2\cdot 5,974\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{2\cdot 6,378\cdot 10^6\,\mathrm{m}}} \approx 5,6\ \mathrm{km/s}.$$

Yksikkötarkastelu:

$$\sqrt{\frac{1\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}\cdot 1\mathrm{kg}}{1\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{\frac{1\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1\mathrm{m}^2}{1\mathrm{kg}}}{1\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{1\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}}{1\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{1\mathrm{m}^3}{1\mathrm{ms}^2}} = \sqrt{1\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c) Perehdy pakonopeuksiin oppikirjan mukaan. Katso sivut 131–133.

45. Kiven kiertoaika on T = 2 h 15 min 16 s = 8116 s ja kiven lähtönopeus eli ratanopeus v = 17,37 m/s. Kiven kiertoradan pituus on

$$s = vT = 17{,}37\ \mathrm{m/s}\ 8116\ \mathrm{s} = 140{,}97492\cdot 10^3\ \mathrm{m}.$$

Kiertoajasta ja kiven lentonopeudesta voidaan päätellä, että Annin pituus (heittokorkeus) on niin pieni, että kiven lentoradan säde ≈ taivaankappaleen säde r.
Taivaankappaleen säde on

$$r = \frac{s}{2\pi} = \frac{140,97492\cdot 10^3\ \mathrm{m}}{2\pi} \approx 22{,}44\ \mathrm{km}.$$

Kiven liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_{\mathrm{n}}$. Gravitaatiovoima pakottaa kiven ympyräradalle. Valitaan suunta keskipistettä kohti positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

1) $$F = \gamma \frac{mM}{r^2} = ma_n = m\frac{v^2}{r},$$

jossa gravitaatiovakio on $\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$, m kiven massa, M taivaankappaleen massa ja $a_n = \frac{v^2}{r}$ normaalikiihtyvyys ympyräradalla.

Yhtälöstä 1) saadaan supistamalla

2) $$\gamma \frac{M}{r} = v^2,$$

josta edelleen

$$M = \frac{rv^2}{\gamma} = \frac{22\,436{,}86\,\mathrm{m} \cdot (17{,}37\,\mathrm{m/s})^2}{6{,}67259 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}} \approx 101{,}4536 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg}.$$

Taivaankappaleen tiheys on

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{101{,}4536 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi(22\,436{,}86\,\mathrm{m})^3} \approx 2144\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Toinen tapa:
Merkintöjen selitykset ja perustelut löytyvät edellisestä ratkaisusta.

(1) $F = \gamma \frac{mM}{r^2} = ma_n = m\frac{v^2}{r}$, josta saadaan

(2) $\gamma \frac{M}{r} = v^2$

(3) $v = \frac{2\pi r}{T}$

(4) $M = \rho V = \rho\, \frac{4\pi r^3}{3}$.

Sijoitetaan M:n ja v:n lausekkeet yhtälöön (2), jolloin saadaan

$$\gamma \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2.$$

Tästä saadaan edelleen tiheydeksi

$$\rho = \frac{3\pi}{T^2 G} = \frac{3\pi}{(8116\,\mathrm{s})^2 \cdot 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s^2}} \cdot \mathrm{m^2/kg^2}} \approx 2144\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Huom. 1: Tiheys voidaan siis laskea mittaamalla pelkästään kiertoaika, kun gravitaatiovakio tunnetaan. Ilman kiven nopeutta ei kuitenkaan voida määrittää kappaleen sädettä, mikä myös oli Anni Astronautin eräs tutkimustehtävä.

Huom. 2: Tehtävässä on mainittu, että Anni seisoo kappaleen navalla. Anni valitsi tämän paikan siksi, että yleensä kappaleet pyörivät akselinsa ympäri. Jos Anni ei olisi heittänyt kiveä navalta, niin hän ei ehkä koskaan olisi nähnyt kiveä uudelleen, vaikka se olisi jäänyt kiertämään kappaletta.
Kappaleen navalla pinnan ratanopeus on nolla. Kaukana navasta pinnan ratanopeus voi olla suuri. Heitetyn kappaleen nopeus on heittonopeuden ja kappaleen pinnan nopeuden vektorisumma.

46. Valitaan suunta alaspäin positiiviseksi. Yhtälöstä $s=\frac{1}{2}gt^2$ saadaan ajaksi

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 35\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}}\approx 2{,}7\,\mathrm{s}.$$

Loppunopeus on

$$v=v_0+gt=0+gt=9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 2{,}67\,\mathrm{s}\ \approx 26\,\mathrm{m/s}.$$

47. Oletetaan, että hyppääjän nopeus muuttuu lopulta pystysuoraksi. Tarkastellaan koko ajan nopeuden pystysuoraa komponenttia, joka alussa on nolla, kun oletetaan, että lentokone lentää vaakasuorassa hyppyhetkellä. Lasketaan hyppääjän nopeus 100 metrin pudotuksen jälkeen. Oletetaan, että alkuvaiheessa ilmanvastus on vähäinen. Painovoima tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi.

Mekaanisen energian säilymislaista $mgh=\frac{1}{2}mv^2$ saadaan nopeudeksi

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 100\,\mathrm{m}}\approx 44{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

Alkuvaiheen jälkeen liike on hidastuvaa. Lasketaan aika, jonka kuluessa nopeus pienenee arvoon 5,0 m/s. Loppunopeus on $v=v_0+at$, josta saadaan

$$t=\frac{v-v_0}{a}=\frac{5{,}0\,\mathrm{m/s}-44{,}29\,\mathrm{m/s}}{-2{,}0\,\mathrm{m/s^2}}\approx 19{,}6\,\mathrm{s}.$$

Tässä ajassa kuljettu matka on

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2=44{,}3\,\mathrm{m/s}\cdot 19{,}6\,\mathrm{s}+\frac{1}{2}\cdot(-2{,}0\,\mathrm{m/s^2})\cdot(19{,}6\,\mathrm{s})^2\approx 480\,\mathrm{m}.$$

Laskuvarjohyppääjän on hypättävä vähintään korkeudelta

100 m + 484 m ≈ 580 m.

48. Nykyisen käsityksen mukaan ilmaan heitetty kappale liikkuu, koska sille on annettu alkunopeus. Kappale pyrkii säilyttämään liiketilansa. Ilmalennon aikana kappaleeseen vaikuttavat Maan vetovoima ja ilmanvastus. Jos ilmanvastusta ei otettaisi huomioon, kappaleen liike vaakasuunnassa on tasaista liikettä (nopeus v_x on vakio) ja liike pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvää liikettä (kiihtyvyys $a = g$ on vakio). Kreikkalaisen ikivanhan tieteellisen näkemyksen virheellisyys näyttää meistä ilmeiseltä. On kuitenkin hyvä muistaa, että jotkin meidän nykyiset tieteelliset näkemyksemme saattavat tulevien sukupolvien mielestä näyttää yhtä selvästi virheellisiltä. Tiede muuttuu koko ajan ja jokaisella ajalla on omat tieteelliset näkemyksensä. Uusilla ja yhä paremmilla mittauslaitteilla saadaan koko ajan uutta ja entistä tarkempaa tietoa. Joskus vanhoja näkemyksiä joudutaan kokonaan tai osittain muuttamaan.

49. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on heittopisteessä. Sovitaan suunta alaspäin positiiviseksi. Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, pallon liikettä voidaan pitää tasaisesti kiihtyvänä.

a) Pallon kulkema matka saadaan yhtälöstä $h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$.

Ratkaistaan lentoaika yhtälöstä

$$\frac{g}{2} t^2 + v_0 t - h = 0,$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} t &= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^{\,2} - 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot (-h)}}{2 \cdot \frac{g}{2}} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^{\,2} + 2gh}}{g} \\ &= \frac{-15\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(15\,\mathrm{m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 114\,\mathrm{m}}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \\ &\approx 3{,}5\,\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Hylätään negatiivinen tulos −6,6 s. Pallo törmää maahan 3,5 s kuluttua.

b) Pallon nopeus on

$$v = v_0 + gt = 15\,\mathrm{m/s} + 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}53\,\mathrm{s} \approx 50\,\mathrm{m/s}.$$

Pallon nopeus maahan törmäämisen hetkellä on 50 m/s.
Tilannetta voidaan tarkastella myös mekaanisen energian säilymislain avulla:

$$mgh_a + \frac{1}{2} m v_a^{\,2} = mgh_1 + \frac{1}{2} m v_1^{\,2}.$$

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi maanpinta ($h_1 = 0$).
Loppunopeudeksi saadaan

$$v_1 = \sqrt{2gh_a + v_a^{\,2}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 114\,\mathrm{m} + (15\,\mathrm{m/s})^2} \approx 50\,\mathrm{m/s}.$$

Tehtävän ratkaisussa ei ole otettu huomioon ilmanvastusta. Pallo heitetään korkealta ja loppunopeus on suuri, joten todellisuudessa ilmanvastus pidentää merkittävästi pallon lentoaikaa ja loppunopeus on pienempi kuin laskettu arvo.

50. Ilmanvastusta ei oteta huomioon ja pystysuoran heittoliikkeen ratkaisussa käytetään mekaanisen energian säilymislakia. Kiven ylöspäin nousemisen aikana painovoima tekee työtä ja muuntaa liike-energian potentiaalienergiaksi. Putoamisen aikana painovoima tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergian liike-energiaksi. Sovitaan rotkon pohja potentiaalienergian nollatasoksi ja ratkaistaan loppunopeus v yhtälöstä

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

jolloin saadaan

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{(18\,\mathrm{m/s})^2 + 2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 49\,\mathrm{m}} \approx 36\,\mathrm{m/s}.$$

Sovitaan suunta ylöspäin positiiviseksi, jolloin rotkon pohjaan osumisen nopeus on $v = -36\,\mathrm{m/s}$.

Koska liike on tasaisesti kiihtyvää, loppunopeus saadaan yhtälöstä $v = v_0 - gt$, josta saadaan tapahtumaan kulunut aika

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{18\,\mathrm{m/s} - (-36\,\mathrm{m/s})}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 5{,}5\,\mathrm{s}.$$

Kivi putoaa 5,5 sekunnin kuluttua rotkoon nopeudella 36 m/s.

51. Ilmanvastusta ei oteta huomioon, jolloin kiven liike on pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvää ja vaakasuunnassa tasaista.

Yhtälöstä $h = \frac{1}{2}gt^2$ saadaan putoamisajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 32\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} \approx 2{,}55\,\mathrm{s}.$$

Kantama on

$$x = v_0 \cdot t = 22\,\mathrm{m/s}\cdot 2{,}55\,\mathrm{s} \approx 56\,\mathrm{m}.$$

Lasketaan nopeuden suunta ja suuruus maahan osumisen hetkellä. Sovitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Nopeuden suuruus saadaan yhtälöstä

$$v = \sqrt{{v_y}^2 + {v_x}^2} = \sqrt{(-gt)^2 + {v_x}^2}$$
$$= \sqrt{(-9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2{,}55\,\mathrm{s})^2 + (22\,\mathrm{m/s})^2} \approx 33\,\mathrm{m/s}.$$

Nopeus y-suunnassa on $v_y = v_{0y} - gt$. Koska kivi heitetään rantatörmältä vaakasuoraan, on $v_{0y} = 0$. Silloin $v_y = -gt$.

Nopeuden suuntakulma vaakatasoon nähden saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-gt}{v_x} = \frac{-9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2{,}55\,\mathrm{s}}{22\,\mathrm{m/s}},\ \text{josta}\ \alpha \approx -49^\circ.$$

Kiven kantama on 56 m vaakasuuntaan, nopeuden suuruus 33 m/s ja suuntakulma 49°. Nopeuden suunta on vaakatasosta vinosti alaspäin.

52. Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, kappaleen liikettä voidaan pitää tasaisesti kiihtyvänä liikkeenä pystysuunnassa ja tasaisena liikkeenä vaakasuunnassa.

1) Määritetään nopeuden komponentit hetkellä t = 3,0 s:

$$v_x = v_{0x}\cos\alpha_0 = 50\,\mathrm{m/s}\cdot\cos 60^\circ = 25\,\mathrm{m/s}$$

$$v_y = v_{0y}\sin\alpha_0 - gt = 50\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 60^\circ - 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3{,}0\,\mathrm{s} \approx 13{,}9\,\mathrm{m/s}.$$

Nopeuden suuruus (itseisarvo) on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(25{,}0\,\mathrm{m/s})^2 + (13{,}9\,\mathrm{m/s})^2} \approx 29\,\mathrm{m/s}.$$

Lasketaan nopeuden suuntakulma yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{v_\mathrm{y}}{v_\mathrm{x}} = \frac{13{,}9\,\mathrm{m/s}}{25{,}0\,\mathrm{m/s}},$$

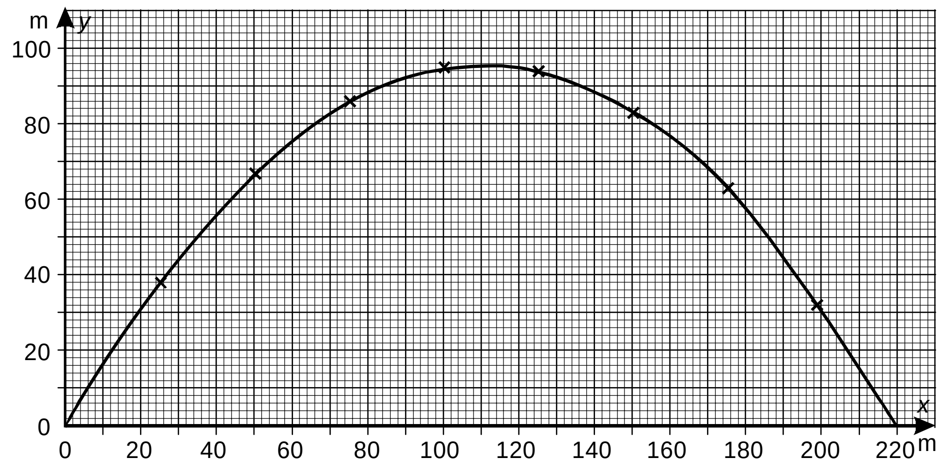
jolloin saadaan $\alpha \approx 29^\circ$ vaakatasosta ylöspäin.

2) Lasketaan kappaleen paikan koordinaatit ajan t funktiona:

$$x = v_0\cos\alpha_0\cdot t = 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\cos 60^\circ\cdot t = 25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t$$

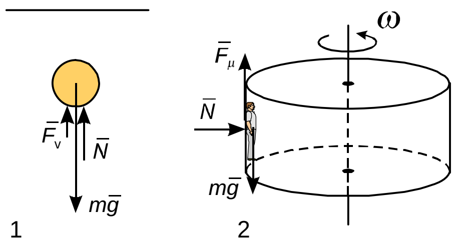
$$\begin{aligned} y &= v_0\sin\alpha_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sin 60^\circ\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot t^2 \\ &= 43{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot t - 4{,}91\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot t^2. \end{aligned}$$

t/s	x/m	y/m
1	25	38
2	50	67
3	75	86
4	100	95
5	125	94
6	150	83
7	175	63
8	200	32
(9	225	−8)



53. a) 1) Ei, koska nopeus ei ole tasaista pystysuorassa heittoliikkeessä.
2) Ei, koska pystysuorassa heittoliikkeessä nopeus muuttuu positiivisesta negatiiviseksi.
3) Kyllä, koska kiihtyvyys on vakio ja negatiivinen (hidastuva liike) ja nopeus muuttuu kuvassa positiivisesta negatiiviseksi.
4) Ei, koska kiihtyvyyden tulee olla piirroksessa vakio.
5) Kyllä, koska kiihtyvyys on vakio ja negatiivinen.

b) Kivi, joka putoaa vedessä: kiveen vaikuttavat voimat ovat painovoima, noste ja väliaineen vastus.
Karusellissa oleva henkilö: henkilöön vaikuttavat voimat ovat painovoima, lepokitka ja seinästä henkilöön kohdistuva tukivoima.



54. a) Painovoima tekee työtä ja muuntaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi. Kitkamomentti tekee työtä ja muuntaa osan potentiaalienergiasta rotaatioenergiaksi. Lähtökorkeus katon reunasta mitattuna on $h = 6{,}0\,\text{m} \cdot \sin 35° = 3{,}441\,\text{m}$.
Systeemin ulkoiset vastustavat voimat, kuten ilmanvastus, voidaan olettaa vähäisiksi. Silloin sylinterin potentiaalienergia muuttuu vierimisen aikana etenemisen ja pyörimisen liike-energiaksi ja mekaanisen energian säilymislakia voidaan soveltaa:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

ja edelleen

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2.$$

Sylinterin nopeus katon reunalla on

$$v=\sqrt{\frac{4gh}{3}}=\sqrt{\frac{4\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3{,}441\,\mathrm{m}}{3}}=6{,}709\,\mathrm{m/s}.$$

Sylinterin kulmanopeus on

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{6{,}709\,\mathrm{m/s}}{0{,}18\,\mathrm{m}}\approx 37\,\mathrm{rad/s}.$$

b) Katon reunan jälkeen sylinterin liikettä voidaan tarkastella vinona heittoliikkeenä, jonka alkunopeus $v_0=6{,}709\,\mathrm{m/s}$.
Alkunopeuden vaakakomponentti

$$v_{0x}=v_0\cos 35^\circ=6{,}709\,\mathrm{m/s}\cdot\cos 35^\circ=5{,}4957\,\mathrm{m/s}.$$

Alkunopeuden pystykomponentti on

$$v_{0y}=v_0\sin 35^\circ=6{,}709\,\mathrm{m/s}\cdot\sin 35^\circ=3{,}8481\,\mathrm{m/s}.$$

Pystysuunnassa sylinteri putoaa heiton aikana 5,0 metrin matkan, joten yhtälöstä

$$y=v_{0y}t+\frac{1}{2}gt^2$$

saadaan ratkaistua putoamisaika:

$$\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t-y=0$$

$$t=\frac{-v_{0y}\pm\sqrt{(v_{0y})^2-4\cdot\frac{1}{2}g\cdot(-y)}}{2\cdot\frac{1}{2}g}$$

$$=\frac{-3{,}8481\,\mathrm{m/s}\pm\sqrt{(3{,}8481\,\mathrm{m/s})^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot(-5{,}0\,\mathrm{m})}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}.$$

Tämän yhtälön ratkaisuina saadaan putoamisajaksi

$t=0{,}6909$ s (tai $t=-1{,}475$ s).

Hyväksytään vain ajan positiivinen arvo. Tässä ajassa sylinteri liikkuu vaakasuunnassa matkan

$$x=v_{0x}t=5{,}4957\,\mathrm{m/s}\cdot 0{,}6909\,\mathrm{s}\approx 3{,}8\,\mathrm{m}.$$