Kertaustehtävät

1. c) Loppunopeus on $v=\sqrt{2as}=\sqrt{2\cdot 1{,}2\ \text{m/s}^2\cdot 55\ \text{m}}\approx 11\,\text{m/s}$.

2. c) Kiihtyvyys on $a=\dfrac{v-v_0}{t}=\dfrac{\frac{18}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}-\frac{72}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{15\,\text{s}}\approx -1{,}0\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

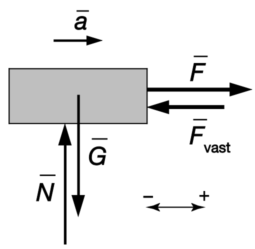
Kolmessa sekunnissa kuljettu matka on

$$s_3=v_0t+\frac{1}{2}at^2=\frac{72}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 3{,}0\,\text{s}+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}0\ \text{m/s}^2)\cdot(3{,}0\,\text{s})^2\approx 55{,}5\,\text{m}.$$

Kahdessa sekunnissa kuljettu matka saadaan vastaavalla tavalla,

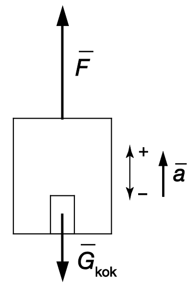
$$s_2=v_0t+\frac{1}{2}at^2=\frac{72}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 2{,}0\,\text{s}+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2})\cdot(2{,}0\,\text{s})^2=38\,\text{m}.$$

Kolmannen sekunnin aikana kuljettu matka: $s = s_3 - s_2 = 55{,}5\ \text{m} - 38\ \text{m} = 17{,}5\ \text{m} \approx 18\ \text{m}$.



3. c) Liikeyhtälöstä $\Sigma\bar{F}=m\bar{a}$ saadaan skalaariyhtälö $F-F_{\text{vast}}=ma$, kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi.

Kiihtyvyys on $a=\dfrac{F-F_{\text{vast}}}{m}=\dfrac{350\ \text{N}-290\ \text{N}}{12\ \text{kg}}\approx 5{,}0\ \text{m/s}^2$.



4. a) Olkoon n henkilöiden lukumäärä. Liikeyhtälöstä $\Sigma\bar{F}=m\bar{a}$ saadaan skalaariyhtälö $F-(G+n\cdot mg)=(M+nm)a$ valitsemalla suunta ylöspäin positiiviseksi. Ratkaistaan skalaariyhtälöstä henkilöiden lukumäärä n:

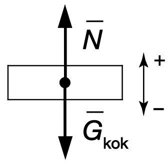
$$F-G-n\cdot mg=Ma+nma$$

$$n=\frac{F-G-Ma}{mg+ma}=\frac{F-Mg-Ma}{m(g+a)}$$

$$=\frac{9{,}0\,\text{kN}-510\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2-510\ \text{kg}\cdot 2{,}0\ \text{m/s}^2}{75\ \text{kg}\cdot(9{,}81\ \text{m/s}^2+2{,}0\ \text{m/s}^2)}$$

$\approx 3{,}4$ eli 3 henkilöä.

5. c) Kitkakerroin on $\mu=\dfrac{F}{N}=\dfrac{F}{mg}=\dfrac{2{,}0\,\text{N}}{1{,}0\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}\approx 0{,}20.$



6. c) Koska jäälautta on tasapainossa, on voimassa yhtälö $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G}_{\text{kok}} = \overline{0}$. Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $\rho_{\text{v}}Vg - m_1 g + m_{\text{jää}}g = 0$. Koska tilavuus on $V = Ah$ ja massa $m = \rho V$, saadaan yhtälö $\rho_{\text{v}}Ahg = m_1 g + \rho_{\text{jää}}Ahg$.
Ratkaistaan yhtälöstä jäälautan pinta-ala:

$$A(\rho_{\text{v}}hg - \rho_{\text{jää}}hg) = m_1 g$$

$$A = \frac{m_1}{\rho_{\text{v}}h - \rho_{\text{jää}}h} = \frac{70\text{ kg}}{1000\text{ kg/m}^3 \cdot 0{,}25\text{ m} - 930\text{ kg/m}^3 \cdot 0{,}25\text{ m}} \approx 4\text{ m}^2.$$

7. c) Rinteen suuntainen komponentti on $F_x = F\cos 14° = 270\,\text{N} \cdot \cos 14° \approx 260\,\text{N}$.

8. b) Mekaanisen energian säilymislain mukaan on $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, josta nousukorkeus on

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\frac{41}{3{,}6}\text{ m/s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}} \approx 6{,}6\text{ m}.$$

9. a) Työperiaatteen mukaan on $\frac{1}{2}mv^2 = \mu mgs$, josta kitkakerroin on

$$\mu = \frac{v^2}{2gs} = \frac{(8{,}5\text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\text{ m/s} \cdot 5{,}5\text{ m}} \approx 0{,}67.$$

10. b) Impulssiperiaatte $\overline{F}\Delta t = \Delta\overline{p}$ saadaan muotoon $\overline{F}\Delta t = m\overline{v} - m\overline{v}_0$. Kun pallon alkuperäinen liikesuunta valitaan negatiiviseksi, voiman suuruus on

$$F = \frac{mv - mv_0}{\Delta t} = \frac{0{,}15\,\text{kg} \cdot 32\text{ m/s} - 0{,}15\,\text{kg} \cdot (-18\text{ m/s})}{0{,}020\,\text{s}} \approx 380\text{ N}.$$

11. a) Ryhmän ajoaika on 1,0 min + 5,0 min = 6,0 min. Pekan ajoaika on 5,0 min. Koska kumpikin ajaa saman matkan ($s = vt$), saadaan yhtälö $v_{\text{Pekka}} \cdot \frac{5{,}0}{60}\text{h} = 20\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{6{,}0}{60}\text{h}$, , josta Pekan nopeus on $v_{\text{Pekka}} = 24\text{ km/h}$.

b) Pyöräilijän polkiessa pyörän ja maan välinen kitka vie pyörää ja pyöräilijää eteenpäin tietyllä teholla. Vauhdin kasvaessa myös ilmanvastus kasvaa ja muuttaa kasvavalla teholla mekaanista työtä esimerkiksi lämmöksi. Lopulta ilmanvastus ja muut liikevastukset ovat yhtä suuria kuin liikettä ylläpitävä kitka. Pyöräilijän ponnistellessa läkähtymäisillään tehot ovat maksimissaan. Alamäessä myös painovoima tekee työtä ja muuttaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi, mutta lopulta loivassa alamäessäkin saavutetaan rajanopeus, jos mäki on tarpeeksi pitkä.

12. a) Marjatan nopeus Tuijaan nähden on v = 3,0 m/s – 2,8 m/s = 0,20 m/s.

b) Tuijan koordinaatistossa Marjatan nopeus on 0,20 m/s ja Marjatan kulkema matka 50 m.

Näin ollen $t = \frac{s}{v} = \frac{50\,\text{m}}{0{,}20\,\text{m/s}} = 250\,\text{s}$.

c) Marjatta juoksee (Maan koordinaatistossa) nopeudella 3,0 m/s 250 sekunnin ajan eli matkan

$s = vt$ = 3,0 m/s · 250 s = 750 m.

13. a) Koneen alkunopeus on v_0 = 0 m/s ja loppunopeus v = 220 km/h ≈ 61,111 m/s. Sijoittamalla aika $t = v/a$ matkan yhtälöön $s = \frac{1}{2}at^2$ koneen kulkema matka on

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} = \frac{(61{,}111\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 2{,}5\,\text{m/s}^2} \approx 750\ \text{m}.$$

b) Koneen kiihtyvyys myötätuulessa on a_t = 2,6 m/s^2. Koneen nopeuden tulee olla ilman suhteen v_i = 61,111 m/s. Koska myötätuuli on v_t = 11 m/s, nopeus maan suhteen on $v_m = v_i + v_t$ = 61,111 m/s + 11 m/s = 72,111 m/s.

Edellisen a-kohdan mukaan nousukiidon pituus on $s = \frac{v_m^2}{2a_t} = \frac{(72{,}111\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 2{,}6\,\text{m/s}^2} \approx 1{,}0$ km.

14. a) Kuljettu matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

aikaväli 0,0 s...4,0 s: $s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0\ \text{m/s} \cdot 4{,}0\ \text{s} = 4{,}0\ \text{m}$ ja

aikaväli 4,0 s...6,0 s: $s_2 = \frac{1}{2} \cdot \left|-2{,}0\ \text{m/s}\right| \cdot 2{,}0\ \text{s} = 2{,}0\ \text{m}$.

Kokonaismatka on $s = s_1 + s_2$ = 4,0 m + 2,0 m = 6,0 m.

b) Etäisyys lähtöpaikasta on 4,0 m − 2,0 m = 2,0 m.

c) Keskinopeus on $v_k = \frac{s}{t} = \frac{6{,}0\,\text{m}}{7{,}0\,\text{s}} \approx 0{,}86\,\text{m/s}$.

15. a) Raitiovaunu saavuttaa nopeuden 8,0 m/s 8,0 sekunnissa. Tässä ajassa raitiovaunu kulkee matkan

$$s = v_k t = \frac{v_0 + v}{2}t = \frac{0{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 8{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}t = \frac{1}{2} \cdot 8{,}0\ \text{m/s} \cdot 8{,}0\ \text{s} = 32\ \text{m}.$$

Jarrutettaessa kuljetaan samoin 32 m. Huippunopeudella 8,0 m/s kuljetaan matka

200 m − (32 m + 32 m) = 136 m.

Tähän kuluu aikaa $t = \frac{s}{v} = \frac{136\,\text{m}}{8{,}0\,\text{m/s}} = 17\,\text{s}$.

Lyhin aika on siis t_{min} = 8,0 s + 17 s + 8,0 s = 33 s.

b) Yksikkö on $[a] = \frac{[\Delta v]}{[t]} = \frac{1\text{ m/s}}{1\text{s}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = 1\,\text{m/s}^2$

16. a) Auton loppunopeus 8,0 sekunnin kuluttua on $v = at = 3{,}0\text{ m/s}^2 \cdot 8{,}0\text{ s} = 24\text{ m/s}$.

b) Keskinopeus on $v_\text{k} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{1}{2} \cdot (0\text{ m/s} + 24\text{ m/s}) = 12\text{ m/s}$.

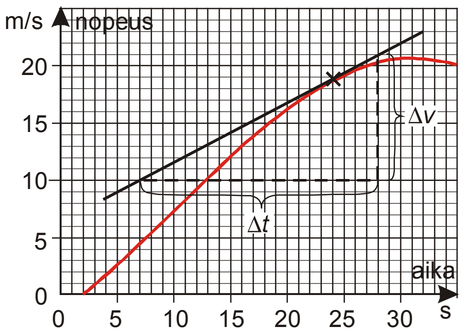
c) Auton kahdeksassa sekunnissa kulkema matka on $s = v_\text{k} \cdot t = 12\text{ m/s} \cdot 8{,}0\text{ s} = 96\text{ m}$.

(Toinen tapa**:** $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0\text{ m/s}^2 \cdot (8{,}0\text{ s})^2 = 96\text{ m}$.)

17. a) Junan suurin nopeus kuvatulla aikavälillä on luettavissa kuvaajan ylimmästä pisteestä. Suurin nopeus on likimain 20,5 m/s.

b) Hetkellinen kiihtyvyys saadaan kohtaan t = 24 s piirretyn tangentin fysikaalisena kulmakertoimena:

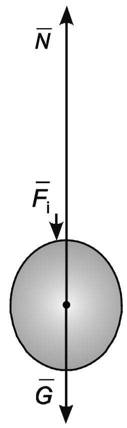
$$a(24\,\text{s}) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{21\,\text{m/s} - 10\,\text{m/s}}{28\,\text{s} - 7{,}0\,\text{s}} \approx 0{,}52\,\text{m/s}^2.$$



c) Keskinopeuden laskemiseksi tarvitaan kuljettu matka, joka on (t, v)-koordinaatistossa fysikaalinen pinta-ala. Kuvaajan ja t-akselin välinen alue aikavälillä 0,0 s … 15,0 s on kolmio. Matkan muutos on $\Delta s = \frac{12{,}5\,\text{m/s} \cdot 12\,\text{s}}{2} = 75\,\text{m}$. Junan keskinopeus aikavälillä 0,0 s… 15,0 s on

$$v_\text{k} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{75\,\text{m}}{15\,\text{s}} = 5{,}0\,\text{m/s}.$$

18. a) Ilmapallon massa koostuu pallon massasta ja sen sisällä olevan ilman massasta.



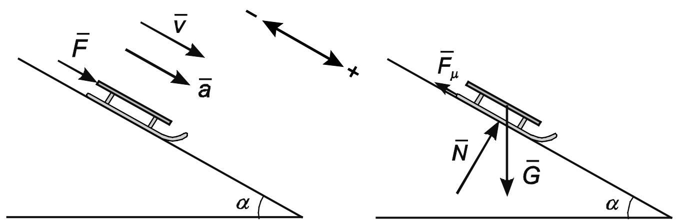
Ilmapalloon kohdistuu paino $\overline{G}$. Ilmasta palloon kohdistuu noste $\overline{N}$ ylöspäin. Noste on yhtä suuri kuin pallon syrjäyttämän ilman paino. Kun pallo liikkuu ylöspäin, palloon vaikuttaa liikkeen suuntaan nähden vastakkaissuuntainen ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$.

Ilmapallon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Palloon vaikuttaa kolme voimaa, joten kokonaisvoima on $\sum \overline{F} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{\mathrm{i}}$.

b) Maa vetää puoleensa ilmapalloa voimalla $\overline{G}$. Tämän voiman vastavoima on voima, jolla ilmapallo vetää maata ylöspäin. Noste $\overline{N}$ aiheutuu ilmasta ja kohdistuu ilmapalloon. Nostevoiman vastavoima aiheutuu pallosta ja kohdistuu ilmaan. Ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$ aiheutuu ilmasta ja kohdistuu palloon. Ilmanvastusvoiman vastavoima aiheutuu pallosta ja kohdistuu ilmaan.

19. Oletetaan ilmanvastus pieneksi kummassakin kohdassa.

a) Kuvassa on esitetty jyrkässä mäessä olevan kelkan nopeus- ja kiihtyvyysvektorit:

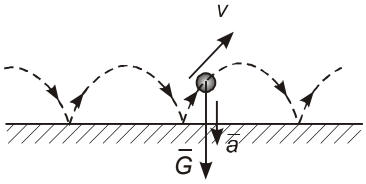


Kelkkaan vaikuttava kokonaisvoima on painon, rinteen tukivoiman ja kitkavoiman summa eli

$$\Sigma\overline{F} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{\mu}.$$

Kun suunta rinteen suunnassa alas on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $\Sigma F = mg\sin\alpha - F_{\mu}$.

b) Pallon nopeus on käyrän (paraabelin) tangentin suuntainen. Palloon kohdistuu paino, joka aiheuttaa pallolle kiihtyvyyden. Kiihtyvyyden suunta on alaspäin. Kokonaisvoima on $\Sigma\overline{F} = \overline{G}$.

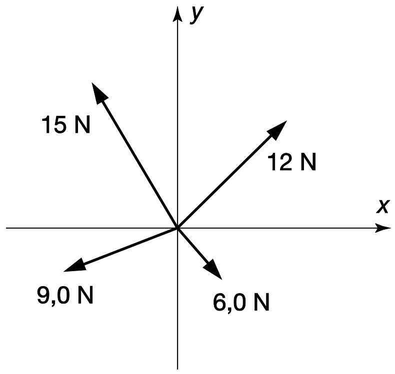


20. Voiman *x*-suuntainen komponentti on

$$F_x = 12\ \text{N} \cdot \cos 45° - 15\ \text{N} \cdot \cos 60° - 9{,}0\ \text{N} \cdot \cos 20° + 6{,}0\ \text{N} \cdot \cos 50° \approx -3{,}6152\ \text{N}.$$

Voiman *y*-suuntainen komponentti on

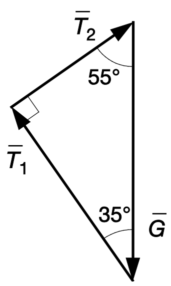
$$F_y = 12\ \text{N} \cdot \sin 45° + 15\ \text{N} \cdot \sin 60° - 9{,}0\ \text{N} \cdot \sin 20° - 6{,}0\ \text{N} \cdot \sin 50° \approx 13{,}8012\ \text{N}.$$



Voimam resultantti on $R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-3{,}6152\,\text{N})^2 + (13{,}8012\,\text{N})^2} \approx 14\,\text{N}$ ja voiman suunta: $\tan\beta = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = \left|\frac{13{,}8012\,\text{N}}{-3{,}6152\,\text{N}}\right|$, josta kulma $\beta \approx 75°$.

Resultanttivoiman suunta on origosta vasemmalle yläviistoon. Suuntakulma negatiivisen *x*-akselin suhteen on 75°, positiivisen *x*-akselin suhteen 105°.

21. Vektorit $\overline{T}_1, \overline{T}_2$ ja $\overline{G}$ toteuttavat ehdon $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.
Narujen jännitysvoimat saadaan yhtälöistä



$$\sin 55° = \frac{T_1}{G},$$

josta jännitysvoiman T_1 suuruus on

$$T_1 = mg\sin 55° = 7{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 55° \approx 59\ \text{N},$$

ja

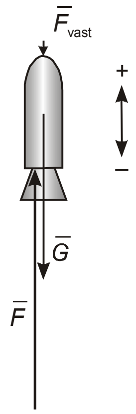
$$\sin 35° = \frac{T_2}{G},$$

josta jännitysvoiman T_2 suuruus on

$$T_2 = mg\sin 35° = 7{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 35° \approx 41\ \text{N}.$$

Jännitysvoimat ovat narujen suuntaiset.

22. a)



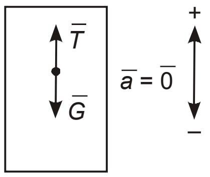
b) Raketin liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_{\text{vast}} + \overline{G} = m\overline{a}$. Kun raketin liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_{\text{vast}} - G = ma$. Raketin kiihtyvyydeksi saadaan

$$a = \frac{F - F_{\text{vast}} - G}{m} = \frac{6450\,\text{N} - 470\,\text{N} - 450\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{450\,\text{kg}} = 3{,}4789\,\text{m/s}^2 \approx 3{,}5\,\text{m/s}^2.$$

c) Raketin nousumatka on $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot (3{,}4789\ \text{m/s}^2) \cdot (3{,}0\ \text{s})^2 \approx 16\ \text{m}$.

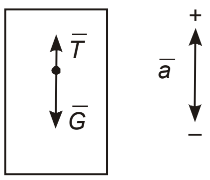
23. Punnuksen liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$. Kun suunta ylöspäin on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T - mg = ma$.

a) Koska punnus liikkuu vakionopeudella, kiihtyvyys on nolla. Yhtälöstä $T - mg = 0$ jousivaa'an lukemaksi saadaan $T = mg = 1{,}6\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 16\,\text{N}$.



b) Kun hissi lähtee alaspäin, skalaariyhtälö on $T - mg = -ma$. Jousivaa'an lukema on

$$T = mg - ma = m(g - a) = 1{,}6\ \text{kg} \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 - 1{,}7\ \text{m/s}^2) \approx 13\ \text{N}.$$



c) Kun hissi lähtee ylöspäin, skalaariyhtälö on $T - mg = ma$ ja lukema

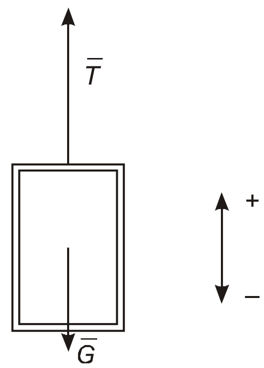
$$T = mg + ma = m(g + a) = 1{,}6\ \text{kg} \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 + 1{,}7\ \text{m/s}^2) \approx 18\ \text{N}.$$

24. Kiihtyvyys $a = \Delta v/\Delta t$ on vakio kaikilla alla olevilla aikaväleillä. Hissin kiihtyvyydet saadaan kuvaajasta fysikaalisena kulmakertoimena:

$$0{,}0\text{ s}\ldots 4{,}0\text{ s: } a_1 = \frac{1{,}5\,\text{m/s}}{4{,}0\,\text{s}} = 0{,}375\,\text{m/s}^2$$

$$4{,}0\text{ s}\ldots 10{,}0\text{ s: } a_2 = 0\text{ m/s}^2 \text{ (liike on tasaista)}$$

$$10{,}0\text{ s}\ldots 12{,}0\text{ s s: } a_3 = \frac{-1{,}5\,\text{m/s}}{2{,}0\,\text{s}} = -0{,}75\,\text{m/s}^2.$$



Hissin liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$. Sovitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $T - mg = ma$ kannatinvaijeria jännittävä voima on $T = ma + mg$.

Kiihtyvyyksiä vastaavat jännitysvoimat ovat

$$T_1 = ma_1 + mg = 480\text{kg}\cdot(0{,}375\,\text{m/s}^2 + 9{,}81\,\text{m/s}^2) \approx 4{,}9\,\text{kN},$$

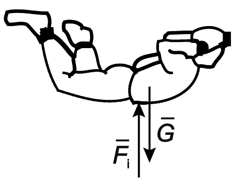
$$T_2 = mg = 480\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \approx 4{,}7\text{ kN} \quad \text{ja}$$

$$T_3 = ma_3 + mg = m(a_3 + g)$$
$$= 480\text{ kg}\cdot(-0{,}75\text{ m/s}^2 + 9{,}81\text{ m/s}^2) \approx 4{,}3\text{ kN}.$$

25. Veturin kiihtyvyys on $a = \dfrac{\Delta v}{t} = \dfrac{\frac{10}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{12{,}0\,\text{s}} = 0{,}23148\text{ m/s}^2 \approx 0{,}23\text{ m/s}^2$. Veturi vetää vaunua voimalla

$$F = ma + 0{,}0050\cdot G = ma + 0{,}0050\cdot mg$$
$$= 7200\text{ kg}\cdot 0{,}23148\text{ m/s}^2 + 0{,}0050\cdot 7200\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \approx 2{,}0\text{ kN}.$$

26. Aluksi liike on tasaisesti kiihtyvää, kunnes vauhdin kasvaessa ilmanvastus pienentää kiihtyvyyden nollaan noin 13 sekunnissa. Tämän jälkeen vauhti on vakio, kunnes noin 19 sekunnin kohdalla varjo alkaa avautua. Varjon avauduttua kokonaan vauhti pienenee arvoon 4 m/s. 30 s:n jälkeen vauhti pysyy vakiona, kunnes hetkellä 210 s hyppääjä tulee maahan.



Nopeuden ollessa vakio hyppääjän liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_\text{i} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, $-G + F_i = 0$, joten ilmanvastus F_i on yhtä suuri kuin hyppääjään kohdistuva paino G (varusteineen). Näin ollen ilmanvastus on

$$F_\text{i} = G = mg = 95\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \approx 930\text{ N}.$$

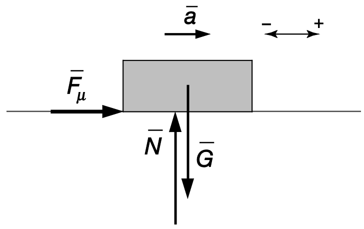
Kuvassa on laskuvarjohyppääjä ennen varjon avautumista ja hyppääjään kohdistuvat voimat, kun nopeus on vakio.

Hyppääjän kiihtyvyys hetkellä 10 s saadaan piirtämällä kuvaajalle tangentti ja laskemalla sen fysikaalinen kulmakerroin: kiihtyvyys on noin 1,4 m/s^2.

Hyppykorkeus saadaan fysikaalisen pinta-alan avulla. Yksi ruutu vastaa korkeutta 2,0 s · 5,0 m/s = 10 m. Koska ruutuja on noin 180, korkeudeksi saadaan 1800 m.

27. a) Laatikon liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_\mu = m\overline{a}$.

Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F_\mu = ma$. Laatikon kiihtyvyys on



$$a = \frac{F_\mu}{m} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g = 0,39 \cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,8259\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3,8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

joka on samalla suurin kiihtyvyys, jolla auto voi lähteä liikkeelle.

Vetokoukkuun vaikuttava voima on $F = ma = 235\text{ kg} \cdot 3,8259\text{ m/s}^2 \approx 900\text{ N}$.

b) Auton pyörien ja tienpinnan välinen kitka antaa kiihtyvyyden koko systeemille. Liikeyhtälöstä $\sum\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan skalaariyhtälö $F_\mu = \mu m_\text{a} g = m_\text{kok} a$. Kitkakerroin on

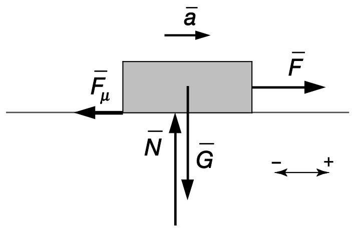
$$\mu = \frac{m_\text{kok} a}{m_\text{a} g} = \frac{(1150\,\text{kg} + 170\,\text{kg} + 65\,\text{kg}) \cdot 3,8259\,\text{m/s}^2}{1150\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2} \approx 0,47.$$

28. a) Liikettä ylläpitävä pienin voima on yhtä suuri kuin kitka eli

$$F = \mu N = \mu mg = 0,30 \cdot 5,0\text{ kg} \cdot 9,81\text{ m/s}^2 = 14,714\text{ N} \approx 15\text{ N}.$$

Kappale liikkuu, jos siihen kohdistuva voima on vähintään 15 N.

b) Kappaleen liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.

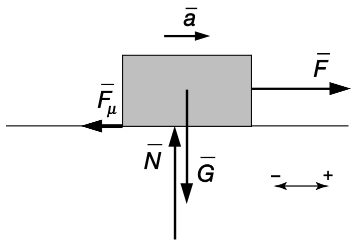


Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.

Kappale on kiihtyvässä liikkeessä. Skalaariyhtälöstä $F - F_\mu = ma$ kappaleen kiihtyvyys on

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{24\,\text{N} - 14,715\,\text{N}}{5,0\,\text{kg}} \approx 1,9\text{ m/s}^2.$$

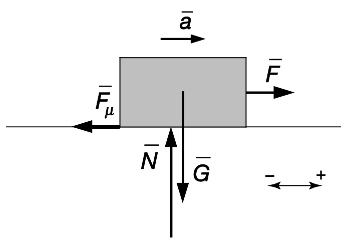
29. a) Kappaleen liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.



Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_\mu = ma$ eli $F - \mu mg = ma$. Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{4,0\,\text{N} - 1,0\,\text{kg} \cdot 2,0\,\text{m/s}^2}{1,0\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2} = 0,2039 \approx 0,20\,.$$

b) Kun liike on tasaista, vetävän voiman $\overline{F}$ ja liikevastusten, tässä tapauksessa kitkan $\overline{F}_\mu$, summa on nolla eli $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.



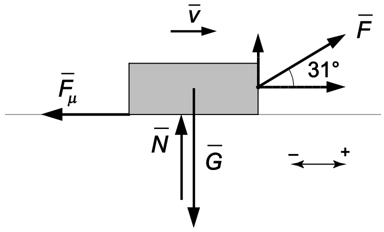
Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan $F - F_\mu = 0$.

Vetävä voima on

$$F = F_\mu = \mu mg = 0,2039 \cdot 1,0\text{ kg} \cdot 9,81\text{ m/s}^2 \approx 2,0\text{ N}.$$

Vetävä voima tekee työtä samalla teholla kuin liikevastukset muuntavat mekaanista työtä muihin energiamuotoihin esimerkiksi lämmöksi ja ääneksi. Myös pintojen kuluminen vaatii energiaa.

30. Koska reki liikkuu vakionopeudella, on $\sum \overline{F}_x = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$.
Valitsemalla suunta oikealle positiiviseksi saadaan
$F_x - F_\mu = 0$ eli $F\cos\alpha - \mu N = 0$. Kitkakertoimeksi saadaan



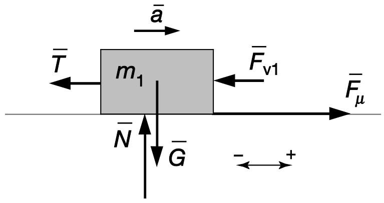
$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N}.$$

Kitkakertoimen laskemiseksi tarvitaan vielä suureyhtälö tukivoimalle *N*. Pystysuorassa suunnassa voimien summa on nolla eli $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_y = \overline{0}$. Kun suuntasopimus otetaan huomioon, saadaan skalaariyhtälö $-G + N + F_y = 0$, josta tukivoimalle saadaan yhtälö $N = G - F_y = mg - F\sin\alpha$.

Kun tukivoiman yhtälö $N = mg - F\sin\alpha$ sijoitetaan kitkakertoimen yhtälöön $\mu = \dfrac{F\cos\alpha}{N}$, kitkakertoimeksi saadaan

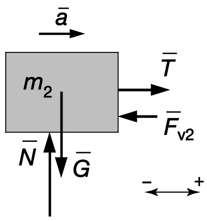
$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N} = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} = \frac{85\ \text{N}\cdot\cos 31°}{78\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 85\ \text{N}\cdot\sin 31°} \approx 0{,}10.$$

31. Auton liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m_1\overline{a}$ eli $\overline{F}_\mu + \overline{F}_{v1} + \overline{T} = m_1\overline{a}$.



Kun auton liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F_\mu - F_{v1} - T = m_1 a$, jossa m_1 on auton massa.

Perävaunun liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m_2\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{F}_{v2} = m_2\overline{a}$.
Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.



Skalaariyhtälö on $T - F_{v2} = m_2 a$.

Lasketaan skalaariyhtälöt puolittain yhteen.

$$\begin{cases} F_\mu - F_{v1} - T = m_1 a \\ T - F_{v2} = m_2 a \end{cases}$$

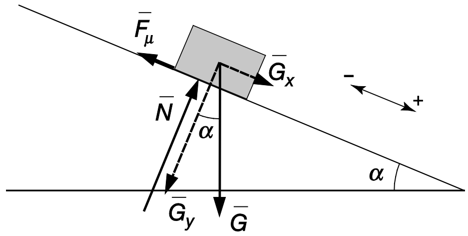
Yhtälöstä $F_\mu - F_{v2} - F_{v1} = m_1 a + m_2 a$ asuntovaunuun kohdistuva liikevastusvoima F_{v2} on

$$\begin{aligned} F_{v2} &= F_\mu - F_{v1} - (m_1 + m_2)a \\ &= 3{,}8\ \text{kN} - 0{,}3\ \text{kN} - (1120\ \text{kg} + 860\ \text{kg})\cdot 1{,}1\ \text{m/s}^2 = 1322\ \text{N} \approx 1{,}3\ \text{kN}. \end{aligned}$$

Auton vetokoukkuun kohdistuva voima on

$$T = m_2 a + F_{v2} = 860\ \text{kg}\cdot 1{,}1\ \text{m/s}^2 + 1322\ \text{N} \approx 2{,}3\ \text{kN}.$$

32. a) Hiihtäjän liikeyhtälö rinteen suunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.



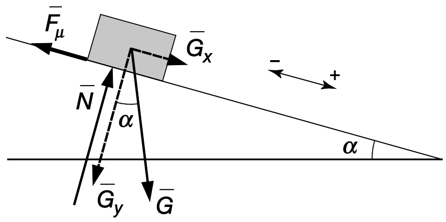
Valitaan suunta rinnettä alaspäin positiiviseksi. Saadaan skalaariyhtälö $G_x - F_\mu = ma$.
Ratkaistaan yhtälöstä hiihtäjän kiihtyvyys:

$$a = \frac{G_x - F_\mu}{m} = \frac{G_x - \mu N}{m} = \frac{G_x - \mu G_y}{m}$$
$$= \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{m(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)}{m}$$
$$= g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$
$$= 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\sin 25° - 0{,}12\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\cos 25° = 3{,}07898\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 3{,}1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$ saadaan ajaksi $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 25\ \mathrm{m}}{3{,}07898\ \mathrm{m/s^2}}} \approx 4{,}0$ s.

c) Massalla ei ole merkitystä tätä mallia käytettäessä, koska sen tunnus *m* supistuu laskuista pois.

33. a) Koska lumilautailija on paikallaan, tasapainoehto on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$.



Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $G_x - F_\mu = 0$ eli $G\sin\alpha - \mu_0 N = 0$.

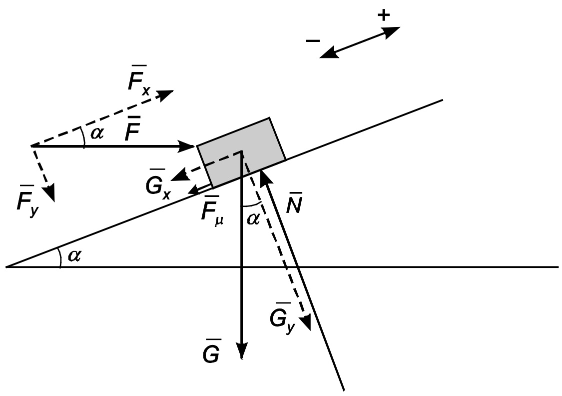
Lähtökitkakerroin on $\mu_0 = \frac{G\sin\alpha}{N} = \frac{G\sin\alpha}{G_y} = \frac{G\sin\alpha}{G\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 7{,}0° \approx 0{,}12.$

b) Liukukitkakerroin on pienempi kuin lepokitkakerroin. Tästä johtuen liukukitka $\overline{F}_{\mu(\mathrm{liuku})}$ on pienempi kuin lepokitka ja a-kohdassa laskettu painon pinnan suuntainen komponentti $\overline{G}_x$. Liikeyhtälö saa muodon $\Sigma\overline{F} = \overline{G}_x - \overline{F}_{\mu(\mathrm{liuku})} = m\overline{a}$, jossa kiihtyvyys $\overline{a}$ ei ole kuitenkaan vakio, koska ilmanvastus kasvaa nopeuden kasvaessa. Lopulta voimien summa on nolla. Tällöin lautailijan nopeus on vakio, jos rinteen kaltevuus ei muutu tai jos lautailija ei muuta ilmanvastusta esimerkiksi menemällä kyykkyyn.

34. a) Kitka on $F_\mu = \mu N = \mu(F_y + G_y) = \mu(F\sin\alpha + G\cos\alpha)$

$$= 0{,}15 \cdot (45\,\text{N} \cdot \sin 22° + 4{,}5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 22°) = 8{,}6682\,\text{N} \approx 8{,}7\,\text{N}.$$

b) Liikeyhtälö tason suunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_x + \overline{F}_\mu + \overline{G}_x = m\overline{a}$.



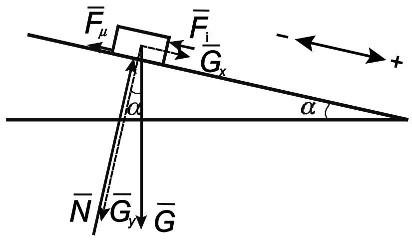
Kun valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö
$F\cos\alpha - F_\mu - G\sin\alpha = ma$.

Kiihtyvyys on

$$a = \frac{F\cos\alpha - F_\mu - mg\sin\alpha}{m}$$

$$= \frac{45\,\text{N} \cdot \cos 22° - 8{,}6682\,\text{N} - 4{,}5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 22°}{4{,}5\,\text{kg}} \approx 3{,}7\,\text{m/s}^2$$

35. Koska hiihtäjä liukuu vakionopeudella, häneen vaikuttavien voimien summa on nolla:
$\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_\text{i} + \overline{F}_\mu + \overline{G}_x = \overline{0}$.



Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin $-F_\text{i} - F_\mu + G_x = 0$ ja ilmanvastus on
$F_\text{i} = G_x - F_\mu = mg\sin\alpha - \mu N$.

Hiihtäjän liikeyhtälö y-suunnassa on $\sum\overline{F}_y = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G}_y = \overline{0}$. Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Tällöin on $N = G_y = mg\cos\alpha$. Sijoitetaan tukivoima ilmanvastuksen yhtälöön, jolloin saadaan

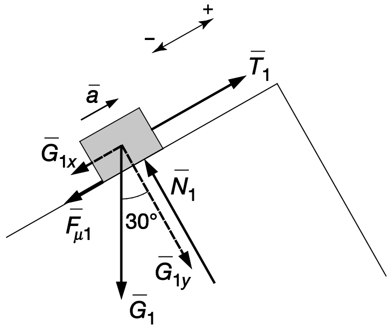
$$F_\text{i} = mg\sin\alpha - \mu N = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$= 72\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (\sin 8{,}0° - 0{,}12 \cdot \cos 8{,}0°) \approx 14{,}4\,\text{N}.$$

Kuvaajasta saadaan tätä ilmanvastusta vastaava nopeus, joka on 14 m/s.

36. Koska köyden jännitysvoima on kaikkialla sama, voidaan merkitä $\left|\overline{T}_1\right| = \left|\overline{T}_2\right| = T$.

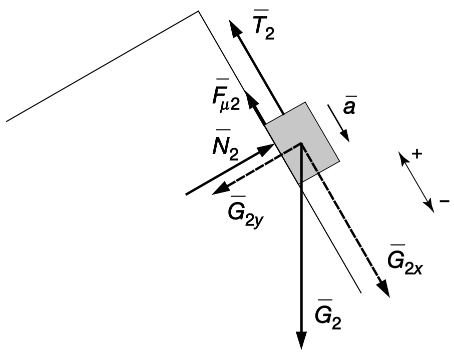
Kappaleen m_1 liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_1\overline{a}$ eli $\overline{T}_1 + \overline{G}_{1x} + \overline{F}_{\mu 1} = m_1\overline{a}$.



Kun valitaan suunta tason suuntaisesti yläviistoon positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $T - G_{1x} - F_{\mu 1} = m_1 a$ eli $T - m_1 g \sin 30^\circ - \mu N_1 = m_1 a$ ja edelleen

$T - m_1 g \sin 30° - \mu m_1 g \cos 30° = m_1 a$.

Kappaleen m_2 liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m_2\overline{a}$ eli $\overline{T}_2 + \overline{F}_{\mu 2} + \overline{G}_{2x} = m_2\overline{a}$.



Kun valitaan suunta tason suuntaisesti yläviistoon positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $T + F_{\mu 2} - G_{2x} = -m_2 a$ eli $T + \mu N_2 - m_2 g \sin 60° = -m_2 a$ ja edelleen

$T + \mu m_2 g \cos 60° - m_2 g \sin 60° = -m_2 a$.

Kirjoitetaan yhtälöt allekkain:

$$T - m_1 g \sin 30° - \mu m_1 g \cos 30° = m_1 a$$
$$T + \mu m_2 g \cos 60° - m_2 g \sin 60° = -m_2 a.$$

Kun alempi yhtälö kerrotaan luvulla –1 ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, saadaan

$$-m_1 g \sin 30° - \mu m_1 g \cos 30° - \mu m_2 g \cos 60° + m_2 g \sin 60° = a(m_1 + m_2).$$

Yhtälöstä saadaan systeemin kiihtyvyydeksi

$$a = \frac{-m_1 g \sin 30° - \mu m_1 g \cos 30° - \mu m_2 g \cos 60° + m_2 g \sin 60°}{m_1 + m_2} \approx 2{,}7\ \text{m/s}^2.$$

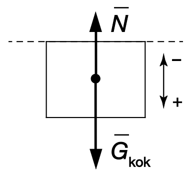
37. Vedessä alumiinipalaan kohdistuva noste on $N = 1{,}02\ \text{N} - 0{,}63\ \text{N} = 0{,}39\ \text{N}$.

Alumiinipalan tilavuus on $V = \dfrac{m}{\rho} = \dfrac{\dfrac{0{,}39\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}}{1000\ \text{kg/m}^3} \approx 3{,}9755 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$. Noste bensiinissä on $1{,}02\ \text{N} - 0{,}75\ \text{N} = 0{,}27\ \text{N}$. Bensiinin tiheys on $\rho = \dfrac{m_2}{V} = \dfrac{\dfrac{0{,}27\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}}{3{,}9755 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3} \approx 690\ \text{kg/m}^3$.

38. Olkoon x purettavan lastin massa. Laivaan kohdistuvan nosteen on oltava sama Suomenlahdella kuin Atlantilla. Saadaan yhtälö $\rho_A V_1 g = \rho_S V_2 g$. Koska tiheys on $\rho = m/V$, tilavuudelle saadaan yhtälö $V = m/\rho$. Ratkaistaan yhtälöstä $\rho_A \dfrac{m - x}{\rho} = \rho_S \dfrac{m}{\rho}$ purettavan lastin massa: $\rho_A m - \rho_A x = \rho_S m$. Massaksi saadaan

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{m(\rho_A - \rho_S)}{\rho_A} = \frac{12\,000 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot (1026\ \text{kg/m}^3 - 1004\ \text{kg/m}^3)}{1026\ \text{kg/m}^3} \\
&\approx 260\,000\ \text{kg}.
\end{aligned}
$$

39. Liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G} + \overline{N} = m\overline{a}$. Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $mg - N = ma$. Koska massa on $m = \rho V$ ja noste $N = \rho V g$, saadaan yhtälö $\rho_A V g - \rho_v V g = \rho_A V a$, josta kiihtyvyydeksi saadaan



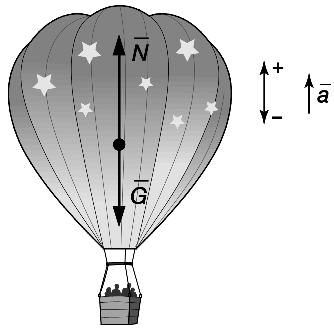
$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\rho_A V g - \rho_v V g}{\rho_A V} = \frac{\rho_A g - \rho_v g}{\rho_A} = \frac{(2{,}70\ \text{g/cm}^3 - 1{,}00\ \text{g/cm}^3) \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2{,}70\ \text{g/cm}^3} \\
&\approx 6{,}2\ \text{m/s}^2.
\end{aligned}
$$

Veden virtausvastus kasvaa nopeuden kasvaessa, joten kiihtyvyys pienenee. Jos vesi on tarpeeksi syvä, saavutetaan lopulta tilanne, jossa noste ja virtausvastus ovat yhdessä yhtä suuria kuin kappaleen paino. Tällöin kiihtyvyys on nolla ja kappaleen nopeus vakio.

40. a) Uponnut laiva syrjäyttää vähemmän vettä kuin kelluva laiva, joten veden pinta laskee.

b) Syvemmällä vedessä hydrostaattinen paine on suurempi. Tästä syystä pallon tilavuus pienenee. Syvällä noste on siis pienempi, koska se riippuu pallon tilavuudesta. Ilmapallo uppoaa, koska noste pienenee mutta ilmapalloon kohdistuva paino pysyy samana.

41. Pallon liikeyhtälö $\Sigma\overline{F} = M\overline{a}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = M\overline{a}$, jossa M on kokonaismassa ja N noste.



Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N - G = Ma$ eli $N - Mg = Ma$.

Kun pallo laskeutuu, on $N = Mg - Ma_{\text{alas}}$. Jotta pallo nousisi ylöspäin, massaa on kevennettävä määrällä m. Saadaan yhtälö

$$(M - m)a_{\text{ylös}} = N - (M - m)g \quad \text{eli}$$

$$Ma_{\text{ylös}} - ma_{\text{ylös}} = M(g - a_{\text{alas}}) - Mg + mg .$$

Massaksi m saadaan $m = \dfrac{Ma_{\text{ylös}} + Ma_{\text{alas}}}{g + a_{\text{ylös}}} = \dfrac{1210 \text{ kg} \cdot (0{,}03 \text{ m/s}^2 + 0{,}2 \text{ m/s}^2)}{9{,}81 \text{ m/s}^2 + 0{,}03 \text{ m/s}^2} \approx 30 \text{ kg}.$

42. Koska jokaisen esineeseen kohdistuva paino $G = mg$ ilmassa tiedetään, voidaan laskea jokaisen esineen massa yhtälöstä $m = \dfrac{G}{g}$.

esine	1	2	3	4	5	6
m/g	12,2	26,5	39,8	54,0	70,3	80,5

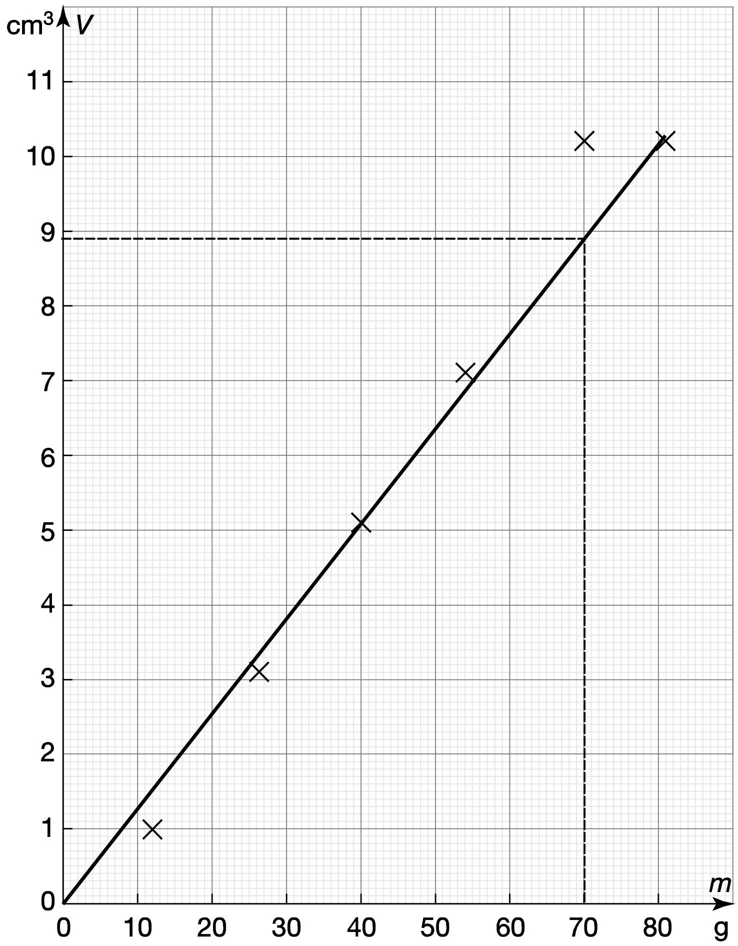
Koska esineet punnittiin sekä ilmassa että vedessä, saadaan noste erotuksesta $N = G_{\text{ilma}} - G_{\text{vesi}}$. Noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliainemäärän paino. Syrjäytyneen veden paino on $G_{\text{vesi}} = N = m_{\text{vesi}}g = \rho_{\text{vesi}}V_{\text{vesi}}g = \rho_{\text{vesi}}V_{\text{esine}}g$.

Esineen tilavuus on $V_{\text{esine}} = \dfrac{N}{\rho_{\text{vesi}}g}$.

Lasketaan nosteen ja tilavuuden arvot ja kirjoitetaan ne taulukkoon.

esine	1	2	3	4	5	6
noste (N)	0,01	0,03	0,05	0,07	0,10	0,10
tilavuus (cm^3)	1,0	3,1	5,1	7,1	10,2	10,2

Piirretään taulukkotietojen perusteella kuvaaja (m, V)-koordinaatistoon.



Kuvaajaksi saadun suoran fysikaalinen kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta V}{\Delta m} = \frac{V_2 - V_1}{m_2 - m_1} = \frac{8{,}9\,\mathrm{cm}^3 - 0\,\mathrm{cm}^3}{70\,\mathrm{g} - 0\,\mathrm{g}} \approx 0{,}1271\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{g}.$$

Tiheyden yhtälöstä $\rho = \frac{m}{V}$ saadaan tilavuudelle yhtälö $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot m.$

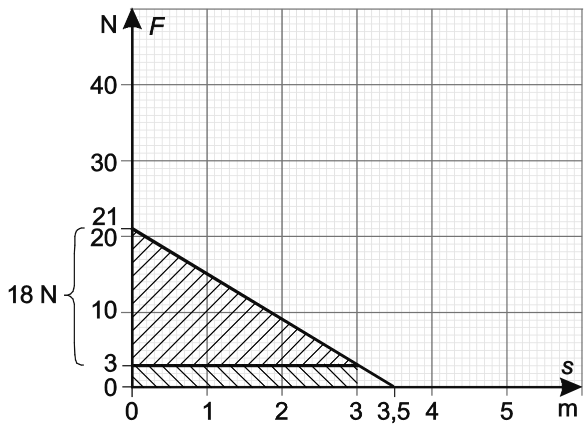
Verrataan tätä yhtälöä origon kautta kulkevan suoran yhtälöön, joka on muotoa $y = kx$.

Huomataan, että kulmakerroin on $k = \frac{1}{\rho}$.

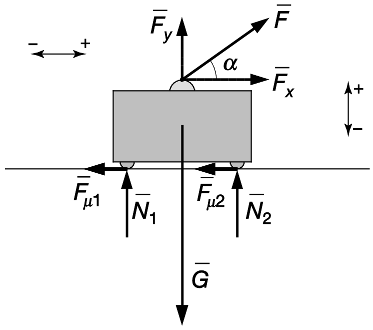
Tiheydeksi saadaan silloin $\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}1271\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{g}} \approx 7{,}9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3.$

43. Voiman tekemä työ (s, F)-koordinaatistossa on sen alueen fysikaalinen pinta-ala, jota rajoittavat kuvaaja $F = 21\text{ N} - (6{,}0\text{ N/m}) \cdot s$, s-akseli sekä pystysuorat suorat kohdissa $s_1 = 0{,}0$ m ja $s_2 = 3{,}0$ m.

Voiman tekemä työ on $W = \frac{1}{2} \cdot 18\text{ N} \cdot 3{,}0\text{ m} + 3{,}0\text{ N} \cdot 3{,}0\text{ m} = 36\text{ J}.$



44. a) Laukkuun kohdistuvat voimat ovat paino, maan pinnan tukivoima, käden vetävä kosketusvoima ja kitka. Ilmanvastusta ei oteta tehtävässä huomioon.



b)Voiman liikkeen suuntainen komponentti on $\overline{F}_x$, joten työtä tekevän voiman suuruus on

$$F_x = F\cos \alpha = 26\text{ N} \cdot \cos 35° = 21{,}30\text{ N} \approx 21\text{ N}.$$

c) Voiman tekemä työ lasketaan voiman liikkeen suuntaisen komponentin F_x avulla, joten voiman tekemä työ laukun siirtämiseksi on

$$W = F_x s = 21{,}30\text{ N} \cdot 650\text{ m} \approx 14\text{ kJ}.$$

d) Kitka on yhtä suuri kuin vetävän voiman liikkeen suuntainen komponentti, mutta vastakkaissuuntainen, joten kitkan tekemä työ on $W_\mu = -F_\mu s = -21{,}30\text{ N} \cdot 650\text{ m} \approx -14\text{ kJ}.$

e) Laukku liikkuu tasaisella nopeudella, joten laukun liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}.$

Sovitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $F_x - F_\mu = 0$, eli $F_x = F_\mu$.

Liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa laukun liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{F}_y + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}.$

Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $F_y + N - G = 0$ pinnan tukivoima on $N = G - F_y = mg - F\sin \alpha$. Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$, toisaalta $F_\mu = F_x = F\cos \alpha$, joten kitkakerroin on

$$\mu = \frac{F_\mu}{N} = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} = \frac{26\text{ N} \cdot \cos 35°}{18{,}0\text{ kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 26\text{ N} \cdot \sin 35°} \approx 0{,}13.$$

45. Junan nopeus on $v = \frac{s}{t} = \frac{210\,\text{km}}{3{,}0\,\text{h}} = 70\,\text{km/h}$. Tehon yhtälöstä $P = Fv$ junan kulkua vastustava keskimääräinen voima on $F = \frac{P}{v} = \frac{750\,\text{kW}}{\frac{70}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 39\,\text{kN}$.

46. Vesivoimalaitoksen teho on $P = \frac{\eta E_\text{p}}{t} = \frac{\eta mgh}{t} = \frac{\eta\rho Vgh}{t}$, josta pudotuskorkeudeksi saadaan $h = \frac{P}{\frac{\eta\rho Vg}{t}} = \frac{12\cdot 10^6\,\text{W}}{\frac{0{,}80\cdot 1000\,\text{kg/m}^3\cdot 140\,\text{m}^3\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{1{,}0\,\text{s}}} \approx 11\,\text{m}$.

47. Tuulivoimalaitoksen teho on $P = \eta\frac{1}{2}\rho\pi r^2 v^3$, josta tuulivoimalaitoksen siiven pituudeksi saadaan $r = \sqrt{\frac{P}{\eta\frac{1}{2}\rho\pi v^3}} = \sqrt{\frac{86\cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{s}}}{0{,}31\cdot\frac{1}{2}\cdot 1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\pi\cdot\left(6{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3}} \approx 22\,\text{m}$.

48. a) Nopeuden pystykomponentti on $v_y = 3\,\text{m/s}\cdot\sin 5° \approx 0{,}3\,\text{m/s}$.

b) Jos kiipeämisessä tehty työ on *mgh* ja kitkatyö 1,5*mgh*, kokonaistyö on

$mgh + 1{,}5mgh = 2{,}5mgh$.

Juoksuteho on $P = \frac{2{,}5mgh}{t} = \frac{2{,}5\cdot 80\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 0{,}261\,\text{m}}{1{,}0\,\text{s}} \approx 500\,\text{W}$.

c) Koska hyötysuhde on $\frac{P_\text{juoksu}}{P_\text{kok}} = 0{,}40$, kokonaisteho on $P_\text{kok} = \frac{600\,\text{W}}{0{,}40} = 1500\,\text{W}$.

Hukkateho on 1500 W – 600W = 900 W.

d) Hauhduttamiseen tarvitaan enrgiaa $E = Pt = 900\,\text{W}\cdot 60\,\text{s} = 54\,\text{kJ}$. Haihtuva hikimäärä saadaan veden ominaishöyrystymislämmön avulla. Hien massa on

$$m = \frac{E}{r} = \frac{54\,\text{kJ}}{2260\,\text{kJ/kg}} \approx 24\,\text{g}.$$

49. Junaan kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ on työperiaatteen mukaan yhtä suuri kuin junan liike-energian muutos, eli

$$W = \Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot 490\,000\ \mathrm{kg}\cdot\left[\left(\frac{180}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(\frac{125}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\right] \approx 317{,}1\ \mathrm{MJ}.$$

Keskimääräisen kokonaisvoiman tekemä työ on $W = F_\mathrm{k}s$, joten junaan kohdistuva liikkeen suuntainen kokonaisvoima on keskimäärin

$$F_\mathrm{k} = \frac{W}{s} = \frac{317{,}1\cdot 10^6\ \mathrm{J}}{7600\ \mathrm{m}} \approx 42\ \mathrm{kN}.$$

Huomaa, että työperiaatteen mukaan kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin liike-energian muutos, alamäen kaltevuudesta ei tarvita tietoa. Junaan kohdistuva kokonaisvoima liikkeen suunnassa koostuu lepokitkasta, joka kohdistuu vetäviin pyöriin, liikevastuksista ja painosta (painon radan suuntaisesta komponentista).

50. a) Kaikilla vaunuilla on yhtä suuri nopeus kohdassa A, koska jokaisen mekaaninen energia säilyy.

b) Suurin kiihtyvyys on vaunulla 2. Tämä johtuu siitä, että kohdassa A vaunun 2 painon tason suuntainen komponentti on suurempi kuin muilla vaunuilla.

c) Kun vaunut lähtevät liikkumaan alas, vaunun 3 kiihtyvyys on alussa suurin, joten alussa vaunulla 3 on suurin nopeus. Koska kaikilla vaunuilla on lopussa yhtä suuri nopeus, vaunun 3 keskinopeus on suurin. Pisteen A ohittaa ensimmäisenä vaunu 3, sillä vaunun 3 keskinopeus on suurin.

51. Oletetaan ilmanvastus vähäiseksi, joten mekaaninen energia säilyy. Mekaanisen energian säilymislaki on $E_\mathrm{p,a} + E_\mathrm{k,a} = E_\mathrm{p,l} + E_\mathrm{k,l}$ eli $mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2$. Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi lähtötaso hiekkakuopassa. Saadaan yhtälö $0 + \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2$, joten $v_\mathrm{l}^2 = v_\mathrm{a}^2 - 2gh_\mathrm{l}$. Pallon vauhti sen osuessa reikään on

$$v_\mathrm{l} = \sqrt{v_\mathrm{a}^2 - 2gh_\mathrm{a}} = \sqrt{\left(5{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}4\,\mathrm{m}} \approx 1{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

Huomaa, että pallon lentoradasta ei tarvita mitään tietoja.

52. Mekaaninen energia säilyy, jos vaunuun kohdistuva ilmanvastus on likimain nolla. Mekaanisen energian säilymislaki on $E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$ eli

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2.$$

Valitaan vaunun asema alemmassa eli jälkimmäisessä mittauspisteessä potentiaalienergian nollatasoksi, joten $E_{p,l} = 0$ J. Ensimmäisen mittauspaikan asema pystysuunnassa nollatason suhteen on $h_a = l \cdot \sin\alpha$, kun $\alpha = 8{,}0°$ ja $l = 1{,}10$ m.
Mekaanisen energia säilymislain mukaan on $mgl \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}mv_a^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_l^2$, joten $v_l^2 = 2gl \cdot \sin\alpha + v_a^2$. Tämä mukaan nopeuden pitäisi olla potentiaalienergian nollatasolla

$$v_l = \sqrt{2gl \cdot \sin\alpha + v_a^2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\text{ m/s} \cdot 1{,}10\text{ m} \cdot \sin 8{,}0° + (0{,}34\text{ m/s})^2} \approx 1{,}8\text{ m/s}.$$

Huomaa, että vaunun massalla ei ole merkitystä.

53. Mekaanisen energian säilymislain mukaan on $\frac{1}{2}kA = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$.
Koska kappaleen liike-energia on puolet kappaleen potentiaalienergiasta, saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}kA = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

josta ratkaistaan poikkeama x:

$$2A = x^2 + 2x^2$$

$$2A = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}A.$$

Kappaleen poikkeamaksi saadaan $x = \sqrt{\frac{2A}{3}}$.

Koska kappaleen liike-energia on puolet kappaleen potentiaalienergiasta, on myös voimassa yhtälö

$$\frac{1}{2}kA = \frac{1}{2}mv^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2,$$

josta ratkaistaan kappaleen nopeus v:

$$kA = mv^2 + 2mv^2$$

$$kA = 3mv^2$$

$$v^2 = \frac{kA}{3m}.$$

Kappaleen nopeudeksi saadaan $v = \sqrt{\frac{kA}{3m}}$.

54. a) Osa auton liike-energiasta muuntuu jousen energiaksi ja osa kitkatyöhön jousen puristumismatkalla x. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan eristämättömässä systeemissä on

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2 - F_\mu x = 0\,.$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö

$$kx^2 + 2F_\mu x - mv^2 = 0$$

$$x = \frac{-2F_\mu \pm \sqrt{(2F_\mu)^2 - 4k(-mv^2)}}{2k}$$

$$= \frac{-2\cdot 250\text{ N} \pm \sqrt{(2\cdot 250\text{ N})^2 - 4\cdot 15\ 000\text{ N/m}\cdot\left(-80\text{ kg}\cdot(1{,}0\text{ m/s})^2\right)}}{2\cdot 15\ 000\text{ N/m}}$$

$$x = 0{,}05824\text{ m} \approx 0{,}058\text{ m tai } x = -0{,}09157\text{ m} \approx -0{,}092\text{ m}.$$

Negatiivinen arvo ei kelpaa, sillä se tarkoittaisi, että kitka lisäisi systeemin mekaanista energiaa törmäyksen aikana. Jousen kokoonpuristuma on 5,8 cm.

b) Hidastuvuus on suurin, kun jousi on törmäyksessä puristunut ääriasentoonsa. Tällöin suurin jousen voima on $F_{\text{max}} = -kx = -15\ 000\text{ N/m} \cdot 0{,}05824\text{ m} \approx -873{,}6\text{ N}$. Newtonin II lain mukaan on $F_{\text{kok}} = ma_{\text{max}}$.

Suurimmaksi kiihtyvyydeksi saadaan $a_{\text{max}} = \dfrac{F_{\text{kok}}}{m} = \dfrac{-873{,}6\text{ N} - 250\text{ N}}{80\text{ kg}} \approx -14\text{ m/s}$.

Suurin hidastuvuus on 14 m/s^2.

c) Kitkan tekemä työ muuntaa harmoniseen jouseen varastoituneen energian muihin energiamuotoihin: yhtälöstä $\frac{1}{2}kx^2 = F_\mu s$ auton liikkuma matka törmäyksen jälkeen on

$$s = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{F_\mu} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 15\ 000\frac{\text{N}}{\text{m}}\cdot(0{,}05824\text{ m})^2}{250\text{ N}} \approx 0{,}10176\text{ m}.$$

Vähennetään auton liikkumasta matkasta jousen puristuma: 10,176 cm − 5,824 cm ≈ 4,4 cm. Auton puskuri jää 4,4 cm etäisyydelle seinästä.

55. a) Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$, jossa $W = Fs$ on liikevastusten tekemä työ. Valitaan auton painopisteen asema pystysuunnassa potentiaalienergian nollatasoksi. Auto pysähtyy lopuksi, joten mekaniikan energiaperiaate on $0 + E_{\text{k,a}} + Fs = 0 + 0$, kun s jarrutusmatka. Liikevastukset ovat

$$F = -\frac{E_{\text{k,a}}}{s} = -\frac{\frac{1}{2}mv^2}{s} = -\frac{\frac{1}{2}\cdot 1200\text{ kg}\cdot\left(\frac{79}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{96\text{ m}} = -3{,}010\text{ kN} \approx -3{,}0\text{ kN}.$$

Voiman suunta on liikesuuntaa vastaan.

b) Mekaniikan energiaperiaate $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ kirjoitetaan a-kohdan perusteella nopeammalle autolle: $0 + E_{k,a} - Fs = E_{k,l}$ eli $\frac{1}{2}mv_a^2 - Fs = \frac{1}{2}mv_l^2$. Yhtälö sievenee muotoon $mv_l^2 = mv_a^2 - 2Fs$. Auton nopeus törmäyshetkellä on

$$v_l = \sqrt{\frac{mv_a^2 - 2Fs}{m}} = \sqrt{\frac{1200\,\text{kg}\cdot\left(\frac{104}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 2\cdot 3010\,\text{N}\cdot 96\,\text{m}}{1200\,\text{kg}}} = 18{,}79\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 68\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

56. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on $\frac{1}{2}mv^2 + W = mgh$ eli $\frac{1}{2}mv^2 + Fs = mgh$.

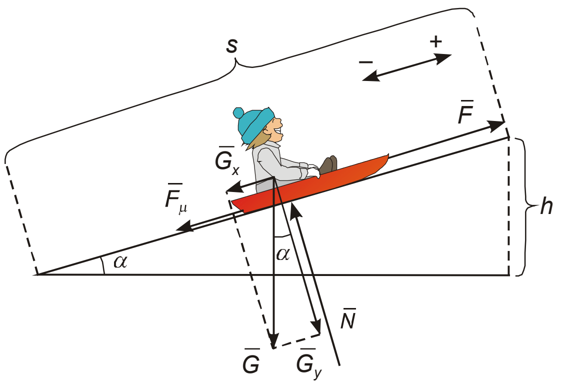
Keskimääräinen liikevastusvoima on

$$F = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{s} = \frac{1250\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 12\,\text{m} - \frac{1}{2}\cdot 1250\,\text{kg}\cdot(\frac{75}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{160\,\text{m}} \approx -780\,\text{N}.$$

Liikevastusvoima on noin 780 N.

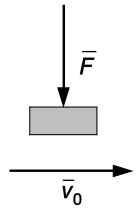
57. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan eristämättömässä systeemissä on $E_p^a + W = E_p^l$. Kun koira vetää kelkkaa ja lasta, kelkkaan kohdistuva voima tekee työtä, joka on yhtä suuri kuin kelkan ja lapsen potentiaaienergian muutos ja kitkan kelkkaan tekemä työ. Tätä työtä sanotaan koiran tekemäkis työksi. Työ on

$$\begin{aligned} W_{\text{koira}} &= \Delta E_p + W_{\text{vast}} = mgh + F_\mu s = mgh + \mu N s \\ &= mgh + \mu mg\cos\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = mgh(1 + \mu\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}) \\ &= 18\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 8{,}0\,\text{m}\cdot(1 + 0{,}20\cdot\frac{\cos 19°}{\sin 19°}) \approx 2{,}2\,\text{kJ}. \end{aligned}$$



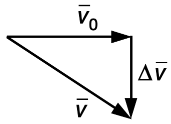
b) Reitistä riippumatta potentiaalienergian muutos on sama. Kitkan voittamiseksi tehty työ kasvaa loivempia reittejä valittaessa, koska matka kasvaa.

58. Impulssiperiaatteesta $\bar{F}\Delta t = m\Delta\bar{v}$ saadaan nopeuden muutokseksi $\Delta v = \dfrac{F\Delta t}{m} = \dfrac{20\ \text{N}\cdot 0{,}50\ \text{s}}{5{,}0\ \text{kg}} = 2{,}0\ \text{m/s}$. Nopeus on



$$v = \sqrt{v_0^2 + (\Delta v)^2} = \sqrt{(3{,}0\ \text{m/s})^2 + (2{,}0\ \text{m/s})^2} \approx 3{,}6\ \text{m/s}.$$

Nopeuden suunta saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \dfrac{\Delta v}{v_0} = \dfrac{2{,}0\ \text{m/s}}{3{,}0\ \text{m/s}}$, josta $\alpha \approx 34°$.



Nopeus on 3,6 m/s ja nopeuden suunta poikkeaa 34° alkuperäisestä liikesuunnasta.

59. Liikemäärä säilyy törmäyksessä**.** Liikemäärän säilymislaki kimmottomassa törmäyksessä on $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}$. Kun hitaamman auton suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $m_1v_1 + m_2(-v_2) = (m_1 + m_2)u$. Autojen nopeudeksi törmäyksen jälkeen saadaan

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2(-v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{18\ 000\ \text{kg}\cdot\dfrac{54}{3{,}6}\dfrac{\text{m}}{\text{s}} + 12\ 500\ \text{kg}\cdot\left(-\dfrac{108}{3{,}6}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{18\ 000\ \text{kg} + 12\ 500\ \text{kg}}$$

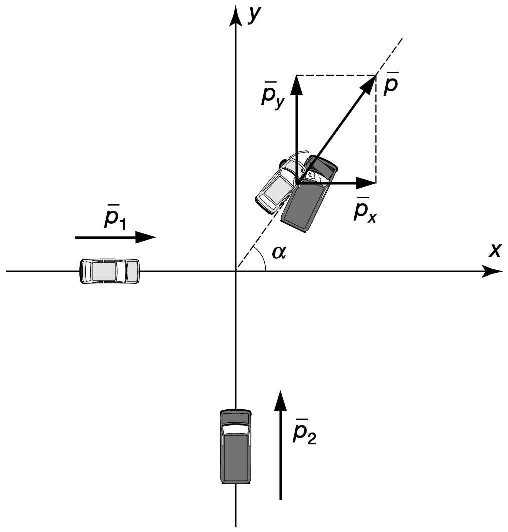
$$= -3{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx -12\ \text{km/h}.$$

Nopeus on noin 12 km/h nopeamman auton liikkeen suuntaan.

60. a) Matkustajan liikemäärän muutos on $\Delta\bar{p} = m\Delta\bar{v}$. Voiman $\bar{F}$ impulssi matkustajaan on yhtä suuri kuin matkustajan liikemäärän muutos eli $\bar{F}\Delta t = m\Delta\bar{v}$, joten $\bar{F} = \dfrac{m\Delta\bar{v}}{\Delta t}$, voima on suoraan verrannollinen nopeuden muutokseen ja kääntäen verrannollinen voiman vaikutusaikaan. Voiman $\bar{F}$ vaikutusaika Δt matkustajaan on likimain yhtä suuri molemmissa autoissa. Matkustajan nopeuden muutos $\Delta\bar{v}$ kevyessä autossa on suurempi kuin raskaassa autossa, joten kevyemmässä autossa matkustajaan kohdistuu suurempi voima (esim. turvavyön voima), joka aiheuttaa pahempia ruhjeita. Lisäksi raskaat autot ovat rakenteeltaan vahvempia kuin kevyet autot, ja siksi matkustajat ovat paremmin suojattuja.

b) Jos turvavyötä ei ole, matkustaja jatkavuuden lain mukaan jatkaa liikettään ja törmää edessään oleviin esteisiin. Tällaisessa törmäyksessä pysäyttävä voima kohdistuu usein pienelle alueelle, jolloin syntyy vammoja. Lisäksi törmäyksen vaikutusaika on pieni, joten pysäyttävä voima on suuri. Turvavyötä käytettäessä vyö jakaa voiman *F* vaikutuksen laajemmalle alueelle *A*, jolloin kehoon voiman vaikutuskohdassa kohdistuva paine $p = \dfrac{F}{A}$ pienenee. Lisäksi turvavyöt joustavat, mikä pidentää voiman vaikutusaikaa ja siten voima pienenee. Nämä molemmat tekijät vähentävät vammoja. Matkustajan törmätessä turvatyynyyn voima jakautuu laajalle alueelle, jolloin kehoon kohdistuva paine tyynyn kohdalla jää pieneksi. Myös turvatyynyt joustavat. Molemmat seikat vähentävät vammautumisriskiä.

61.



Oletetaan, että auto 1 liikkuu pitkin x-akselia ja auto 2 pitkin y-akselia, kumpikin positiiviseen suuntaan, ja että autot törmäävät origossa. Autot tarttuvat törmäyksessä yhteen, joten törmäys on kimmoton. Kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}$. Liikemäärä säilyy myös x- ja y-suunnissa komponenteittain:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u_x \quad \text{ja} \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u_y.$$

Ratkaistaan nopeuden u komponentit:

$$u_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1700\,\text{kg}\cdot 33\,\text{km/h}}{1700\,\text{kg} + 2500\,\text{kg}} \approx 13{,}36\,\text{km/h} \quad \text{ja}$$
$$u_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2500\,\text{kg}\cdot 54\,\text{km/h}}{1700\,\text{kg} + 2500\,\text{kg}} \approx 32{,}14\,\text{m/s}.$$

Autojen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(13{,}36\,\text{km/h})^2 + (32{,}14\,\text{km/h})^2} \approx 35\,\text{km/h}.$$

Suuntakulma α positiivisen x-akselin suhteen saadaan trigonometrian avulla:

$$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{32{,}14\,\text{km/h}}{13{,}36\,\text{km/h}}, \text{ josta } \alpha \approx 67°.$$