Kertaustehtävien ratkaisut

1. c) Loppunopeus on

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 1,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 55\,\mathrm{m}} \approx 11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2. c) Kiihtyvyys on

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{\frac{18}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \frac{72}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{15\,\mathrm{s}} \approx -1,0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Kolmessa sekunnissa kuljettu matka on

$$s_3 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{72}{3,6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3,0\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot (-1,0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}) \cdot (3,0\,\mathrm{s})^2 \approx 55,5\,\mathrm{m}.$$

Kahdessa sekunnissa kuljettu matka saadaan vastaavalla tavalla, s_2 = 38 m. Kolmannen sekunnin aikana kuljettu matka: $s = s_3 - s_2 = 17,5\ \mathrm{m} \approx 18\ \mathrm{m}$.

3. c) Liikeyhtälöstä $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan skalaariyhtälö $F - F_{\mathrm{vast}} = ma$, kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi. Kiihtyvyys on

$$a = \frac{F - F_{\mathrm{vast}}}{m} = \frac{350\ \mathrm{N} - 290\ \mathrm{N}}{12\,\mathrm{kg}} \approx 5,0\,\mathrm{m/s}^2.$$

4. a) Olkoon n henkilöiden lukumäärä. Liikeyhtälöstä $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan skalaariyhtälö $F - (G + \mathrm{n} \cdot mg) = (G + \mathrm{n}m)a$ valitsemalla suunta ylöspäin positiiviseksi. Ratkaistaan skalaariyhtälöstä henkilöiden lukumäärä n:

$$F - G - n \cdot mg = Ga + nma$$

$$n = \frac{F - G - Ga}{mg + ma} = \frac{F - G - Ga}{m(g + a)}$$

$$= \frac{9,0\ \mathrm{kN} - 510\ \mathrm{kg} \cdot 9,81\ \mathrm{m/s}^2 - 510\ \mathrm{kg} \cdot 2,0\ \mathrm{m/s}^2}{75\ \mathrm{kg} \cdot (9,81\ \mathrm{m/s}^2 + 2,0\ \mathrm{m/s}^2)}$$

$\approx 3,4$ eli 3 henkilöä.

5. c) Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{F}{N} = \frac{F}{mg} = \frac{2,0\,\mathrm{N}}{1,0\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\mathrm{m/s}^2} \approx 0,20.$$

6 c) Koska jäälautta on tasapainossa, on voimassa yhtälö $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G}_{\text{kok}} = \overline{0}$. Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$\rho_{\text{v}} Vg - m_1 g + m_{\text{jää}} g = 0 .$$

Koska tilavuus on $V = Ah$ ja massa $m = \varrho V$, saadaan yhtälö

$$\rho_{\text{v}} Ahg = m_1 g + \rho_{\text{jää}} Ahg .$$

Ratkaistaan yhtälöstä jäälautan pinta-ala:

$$A(\rho_{\text{v}} hg - \rho_{\text{jää}} hg) = m_1 g$$

$$A = \frac{m_1}{\rho_{\text{v}} h - \rho_{\text{jää}} h} = \frac{70\,\text{kg}}{1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 0{,}25\,\text{m} - 930\,\text{kg/m}^3 \cdot 0{,}25\,\text{m}} \approx 4\,\text{m}^2.$$

7. c) Rinteen suuntainen komponentti on

$$F_x = F\cos 14° = 270\,\text{N} \cdot \cos 14° \approx 260\,\text{N}.$$

8. b) Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh ,$$

josta nousukorkeus on

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\dfrac{41}{3{,}6}\,\text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}} \approx 6{,}6\,\text{m}.$$

9. a) Työperiaatteen mukaan on

$$\frac{1}{2} mv^2 = \mu mgs ,$$

josta kitkakerroin on

$$\mu = \frac{v^2}{2gs} = \frac{(8{,}5\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\text{m/s} \cdot 5{,}5\,\text{m}} \approx 0{,}67.$$

10. b) Impulssiperiaatteen mukaan on $F\Delta t = mv - mv_0$, josta voimaksi saadaan

$$F = \frac{mv - mv_0}{\Delta t} = \frac{0{,}15\,\text{kg} \cdot 32\,\text{m/s} - 0{,}15\,\text{kg} \cdot (-18\,\text{m/s})}{0{,}020\,\text{s}} \approx 380\,\text{N} .$$

11. a) Ryhmän ajoaika on 1,0 min + 5,0 min = 6,0 min. Pekan ajoaika on 5,0 min. Koska kumpikin ajaa saman matkan ($s = vt$), saadaan yhtälö

$$v_{\text{Pekka}} \cdot \frac{5,0}{60}\,\text{h} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{6,0}{60}\,\text{h},$$

josta Pekan nopeus on $v_{\text{Pekka}} = 24\,\text{km/h}$.

b) Pyöräilijän polkiessa pyörän ja maan välinen kitka vie pyörää ja pyöräilijää eteenpäin tietyllä teholla. Vauhdin kasvaessa myös ilmanvastus kasvaa ja muuttaa kasvavalla teholla mekaanista työtä esimerkiksi lämmöksi. Lopulta ilmanvastus ja muut liikevastukset ovat yhtä suuria kuin liikettä ylläpitävä kitka. Pyöräilijän ponnistellessa läkähtymäisillään tehot ovat maksimissaan. Alamäessä myös painovoima tekee työtä ja muuttaa potentiaalienergiaa liike-energiaksi, mutta lopulta loivassa alamäessäkin saavutetaan rajanopeus, jos mäki on tarpeeksi pitkä.

12. a) Marjatan nopeus Tuijaan nähden on

$$v = 3,0\ \text{m/s} - 2,8\ \text{m/s} = 0,2\ \text{m/s}.$$

b) Tuijan koordinaatistossa Marjatan nopeus on 0,2 m/s ja Marjatan kulkema matka 50 m.
Näin ollen

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50\,\text{m}}{0,20\,\text{m/s}} = 250\,\text{s}.$$

c) Marjatta juoksee (Maan koordinaatistossa) nopeudella 3,0 m/s 250 sekunnin ajan eli matkan

$$s = vt = 3,0\ \text{m/s} \cdot 250\ \text{s} = 750\ \text{m}.$$

13. a) Koneen alkunopeus on v_0 = 0 m/s ja loppunopeus v = 220 km/h ≈ 61,111 m/s.

Sijoittamalla aika $t = v/a$ matkan yhtälöön $s = \frac{1}{2}at^2$, matkaksi saadaan

$$s = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} = \frac{(61{,}111\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 2{,}5\,\text{m/s}^2} \approx 750\ \text{m}.$$

b) Koneen kiihtyvyys myötätuulessa on a_t = 2,6 m/s^2. Nopeuden tulee olla ilman suhteen v_i = 61,111 m/s. Koska myötätuuli on v_t = 11 m/s, nopeus maan suhteen on

$$v_\text{m} = v_\text{i} + v_\text{t} = 61{,}111\ \text{m/s} + 11\ \text{m/s} = 72{,}111\ \text{m/s}.$$

Edellisen a-kohdan mukaan nousukiidon pituus on

$$s = \frac{v_\text{m}^2}{2a_\text{t}} = \frac{(72{,}111\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 2{,}6\,\text{m/s}^2} \approx 1{,}0\ \text{km}.$$

14. a) Kuljettu matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

aikaväli 0...4 s: $s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}0 \text{ m/s} \cdot 4{,}0 \text{ s} = 4{,}0 \text{ m}$ ja

aikaväli 4...6 s: $s_2 = \frac{1}{2} \cdot \left| -2{,}0 \text{ m/s} \right| \cdot 2{,}0 \text{ s} = 2{,}0 \text{ m}$.

Kokonaismatka on $s = s_1 + s_2 = 4{,}0 \text{ m} + 2{,}0 \text{ m} = 6{,}0 \text{ m}$.

b) Etäisyys lähtöpaikasta on 4,0 m − 2,0 m = 2,0 m.

c) Keskinopeus on

$$v_k = \frac{s}{t} = \frac{6{,}0 \text{ m}}{7{,}0 \text{ s}} \approx 0{,}86 \text{ m/s}.$$

15. a) Raitiovaunu saavuttaa nopeuden 8,0 m/s 8,0 sekunnissa. Tässä ajassa raitiovaunu kulkee matkan $s = \frac{1}{2} \cdot 8{,}0 \text{ m/s} \cdot 8{,}0 \text{ s} = 32 \text{ m}$.

Jarrutettaessa kuljetaan samoin 32 m. Huippunopeudella 8,0 m/s kuljetaan matka 200 m − (32 m + 32 m) = 136 m. Tähän kuluu aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{136 \text{ m}}{8{,}0 \text{ m/s}} = 17 \text{ s}.$$

Lyhin aika on siis $t_{min} = 8{,}0 \text{ s} + 17 \text{ s} + 8{,}0 \text{ s} = 33 \text{ s}$.

b) $$[a] = \frac{[\Delta v]}{[t]} = \frac{1 \text{ m/s}}{1 \text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{m/s}^2$$

16. a) Auton loppunopeus 8,0 sekunnin kuluttua on

$v = at = 3{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot 8{,}0 \text{ s} = 24 \text{ m/s}$.

b) Keskinopeus on

$$v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{1}{2} \cdot (0 \text{ m/s} + 24 \text{ m/s}) = 12 \text{ m/s}.$$

c) Auton kahdeksassa sekunnissa kulkema matka on

$s = v_k \cdot t = 12 \text{ m/s} \cdot 8{,}0 \text{ s} = 96 \text{ m}$.

(**Toinen tapa:** $s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot (8{,}0 \text{ s})^2 = 96 \text{ m}$.)

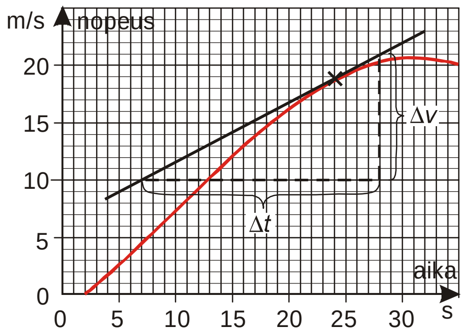
17. a) Junan suurin nopeus kuvatulla aikavälillä on luettavissa piirroksen ylimmästä pisteestä. Suurin nopeus on likimain 20,5 m/s.

b) Kiihtyvyys hetkellä 24 s saadaan, kun piirretään käyrälle tangentti kyseiseen kohtaan.
Hetkellinen kiihtyvyys on tangentin kulmakerroin.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{21\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s}}{28\,\mathrm{s} - 7{,}0\,\mathrm{s}} \approx 0{,}52\,\mathrm{m/s^2}$$

Hetkellinen kiihtyvyys saadaan kohtaan t = 24 s piirretyn tangentin fysikaalisena kulmakertoimena:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{21\ \ \mathrm{m/s} - 10\ \ \mathrm{m/s}}{28\ \ \mathrm{s} - 7{,}0\ \ \mathrm{s}} \approx 0{,}52\ \ \mathrm{m/s^2}.$$



c) Keskinopeuden laskemiseksi tarvitaan kuljettu matka, joka on (t, v)-koordinaatistossa fysikaalinen pinta-ala. Kuvaajan ja t-akselin välinen alue aikavälillä 0–15 s on kolmio. Silloin matkan muutos on

$$\Delta s = \frac{12{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 12\,\mathrm{s}}{2} = 75\,\mathrm{m}.$$

Junan keskinopeus aikavälillä 0–15 s on

$$v_\mathrm{k} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{75\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s}} = 5{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

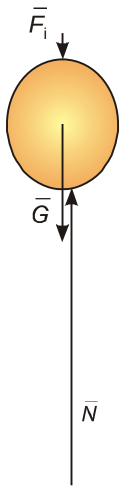
18. a) Vaa'an lukema ei muutu. Se voidaan todeta kokeilemalla. Vaaka mittaa voimaa, jolla Maa vetää henkilöä puoleensa. Asteikko vastaa massaa yhtälön $G = mg$ mukaisesti. Itsensä vetäminen vyöstä ylöspäin on systeemin sisäinen voima. Vyö vetää käsiä alas yhtä suurella voimalla, joka on myös systeemin sisäinen voima.

b) Vaa'an lukema muuttuu, koska ovesta kohdistuu käteen voima.

c) Vasen kuva: Vaikuttavat voimat ovat Maan vetovoima, vaa'an tukivoima ja narun jännitysvoima. Vaa'an lukema on 52 kg – 30 kg = 22 kg.
Oikea kuva: Vaikuttavat voimat ovat Maan vetovoima, vaa'an tukivoima ja säkin paino. Vaa'an lukema on 52 kg + 30 kg = 82 kg.

19. a) Ilmapallon massa koostuu pallon massasta ja sen sisällä olevan ilman massasta.

Ilmapalloon vaikuttaa alaspäin painovoima $\overline{G}$. Ilmasta palloon vaikuttaa noste $\overline{N}$ ylöspäin. Nostevoima on yhtä suuri kuin pallon syrjäyttämän ilman paino. Kun pallo liikkuu ylöspäin, palloon vaikuttaa liikkeen suuntaan nähden vastakkaissuuntainen ilmanvastus $\overline{F}_\mathrm{i}$.

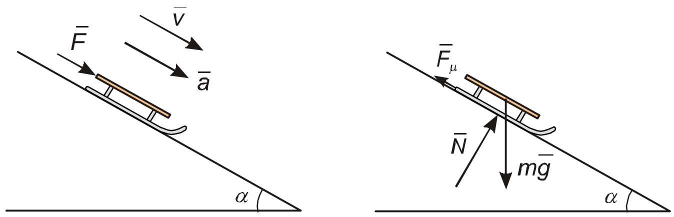


Ilmapallon liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Palloon vaikuttaa kolme voimaa, joten

$$\sum \overline{F} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_\mathrm{i}.$$

b) Maa vetää puoleensa ilmapalloa voimalla $\overline{G}$. Tämän voiman vastavoima on se voima, jolla ilmapallo vetää maata ylöspäin. Noste $\overline{N}$ aiheutuu ilmasta ja kohdistuu ilmapalloon. Nostevoiman vastavoima aiheutuu pallosta ja kohdistuu ilmaan. Ilmanvastus $\overline{F}_\mathrm{i}$ aiheutuu ilmasta ja kohdistuu palloon. Ilmanvastusvoiman vastavoima aiheutuu pallosta ja kohdistuu ilmaan.

20. Oletetaan ilmanvastus pieneksi kummassakin kohdassa.
a) Kuvassa on esitetty jyrkässä mäessä olevan kelkan nopeus- ja kiihtyvyysvektorit:



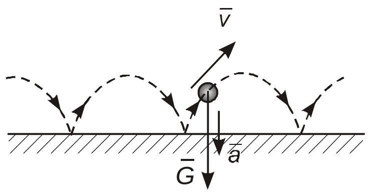
Kelkkaan vaikuttava kokonaisvoima on painovoiman, rinteen tukivoiman ja kitkavoiman summa eli

$$\overline{F} = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_\mu .$$

Kun suunta alaspäin on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$$F = mg\sin\alpha - F_\mu .$$

b) Pallon nopeus on käyrän (paraabelin) tangentin suuntainen. Palloon vaikuttava ainoa voima on painovoima, joka aiheuttaa pallolle kiihtyvyyden. Kiihtyvyyden suunta on alaspäin. Kokonaisvoima on $\bar{F} = m\bar{g}$.



21. Voiman *x*-suuntainen komponentti on

$$F_x = 12\ \mathrm{N}\cdot\cos45^\circ - 15\ \mathrm{N}\cdot\cos60^\circ - 9{,}0\ \mathrm{N}\cdot\cos20^\circ + 6{,}0\ \mathrm{N}\cdot\cos50^\circ$$
$$\approx -3{,}62\ \mathrm{N}.$$

Voiman *y*-suuntainen komponentti on

$$F_y = 12\ \mathrm{N}\cdot\sin45^\circ + 15\ \mathrm{N}\cdot\sin60^\circ - 9{,}0\ \mathrm{N}\cdot\sin20^\circ - 6{,}0\ \mathrm{N}\cdot\sin50^\circ$$
$$\approx 13{,}8\ \mathrm{N}.$$

Voima on

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx 14\,\mathrm{N}$$

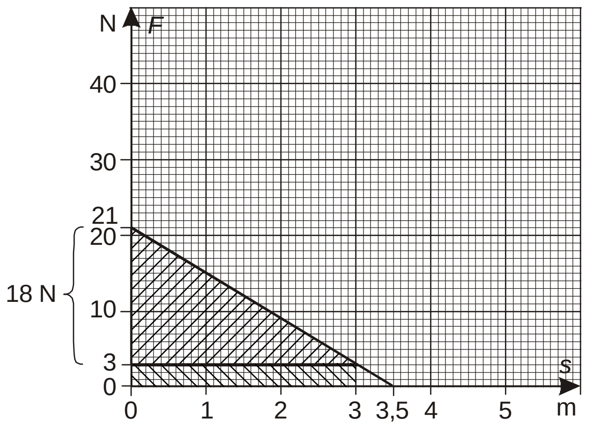
ja voiman suunta

$$\tan\beta = \frac{13{,}8\mathrm{N}}{3{,}62\mathrm{N}},\ \text{josta kulma}\ \beta \approx 75^\circ .$$

Resultanttivoiman suunta on origosta vasemmalle yläviistoon. Suuntakulma negatiivisen *x*-akselin suhteen on 75°, positiivisen *x*-akselin suhteen 105°.

22. Voiman tekemä työ (s, F)-koordinaatistossa on sen alueen fysikaalinen pinta-ala, jota rajoittavat kuvaaja $F = 21\,\mathrm{N} - (6{,}0\,\mathrm{N/m})\cdot s$, *s*-akseli sekä pystysuorat suorat kohdissa s_1 = 0 m ja s_2 = 3,0 m.
Fysikaalinen pinta-ala on

$$W = \frac{1}{2}\cdot 18\,\mathrm{N}\cdot 3{,}0\,\mathrm{m} + 3{,}0\,\mathrm{N}\cdot 3{,}0\,\mathrm{m} = 36\,\mathrm{J}.$$



23. Auton liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m_1\overline{a}$ eli $\overline{F}_\mu + \overline{F}_{v1} + \overline{T} = m_1\overline{a}.$ Kun auton liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F_\mu - F_{v1} - T = m_1 a,$ jossa m_1 on auton massa. Perävaunun liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m_2\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{F}_{v2} = m_2\overline{a}.$ Skalaariyhtälö on

$$T - F_{v2} = m_2 a\,.$$

Lasketaan skalaariyhtälöt puolittain yhteen.

$$\begin{cases} F_\mu - F_{v1} - T = m_1 a \\ T - F_{v2} = m_2 a \end{cases}$$

Yhtälöstä

$$F_\mu - F_{v2} - F_{v1} = m_1 a + m_2 a$$

asuntovaunuun kohdistuva liikevastusvoima F_{v2} on

$$\begin{aligned} F_{v2} &= F_\mu - F_{v1} - (m_1 + m_2)a \\ &= 3{,}8\ \text{kN} - 0{,}3\ \text{kN} - (1120\ \text{kg} + 860\ \text{kg}) \cdot 1{,}1\ \text{m/s}^2 \\ &\approx 1{,}3\ \text{kN.} \end{aligned}$$

Auton vetokoukkuun kohdistuva voima on

$$T = m_2 a + F_{v2} = 860\ \text{kg} \cdot 1{,}1\ \text{m/s}^2 + 1{,}32\ \text{kN} \approx 2{,}3\ \text{kN.}$$

24. Koska reki liikkuu vakionopeudella, on $\sum\overline{F}_x = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$.
Valitsemalla suunta oikealle positiiviseksi saadaan $F_x - F_\mu = 0$ eli

$$F\cos\alpha - \mu N = 0\,.$$

Kitkakertoimeksi saadaan $\mu = \dfrac{F\cos\alpha}{N}$.

Kitkakertoimen laskemiseksi tarvitaan vielä suureyhtälö tukivoimalle N.
Pystysuorassa suunnassa voimien summa on nolla eli

$$\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_y = \overline{0}\,.$$

Kun suuntasopimus otetaan huomioon, saadaan skalaariyhtälö

$$-G + N + F_y = 0\,,$$

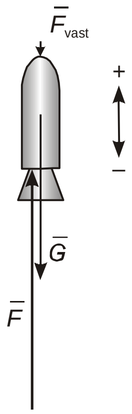
josta tukivoimalle saadaan yhtälö

$$N = G - F_y = mg - F\sin\alpha\,.$$

Kun tukivoiman N yhtälö sijoitetaan kitkakertoimen suureyhtälöön, kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N} = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} = \frac{85\ \text{N} \cdot \cos 31^\circ}{78\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 85\ \text{N} \cdot \sin 31^\circ} \approx 0{,}10.$$

25. a)



b) Raketin liikeyhtälö on $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{F} + \bar{F}_{vast} + \bar{G} = m\bar{a}$. Kun raketin liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_{vast} - G = ma$.
Raketin kiihtyvyydeksi saadaan

$$a = \frac{F - F_{vast} - G}{m} = \frac{6450\,\text{N} - 470\,\text{N} - 450\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{450\,\text{kg}} \approx 3{,}5\,\text{m/s}^2.$$

c) Raketin nousumatka on $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot (3{,}48\ \text{m/s}^2) \cdot (3{,}0\ \text{s})^2 \approx 16\ \text{m}$.

26. a) Liikettä ylläpitävä pienin voima on yhtä suuri kuin kitkavoima eli

$$F = \mu N = \mu mg = 0{,}30 \cdot 5{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 15\ \text{N}.$$

Kappale liikkuu, jos siihen kohdistuva voima on vähintään 15 N.

b) Kappale on kiihtyvässä liikkeessä ja sen kiihtyvyys on

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{24\ \text{N} - 14{,}7\ \text{N}}{5{,}0\ \text{kg}} \approx 1{,}9\ \text{m/s}^2.$$

27. a) Kappaleen liikeyhtälö on $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{F} + \bar{F}_\mu = m\bar{a}$. Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$F - F_\mu = ma \quad \text{eli} \quad F - \mu mg = ma.$$

Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{4{,}0\ \text{N} - 1{,}0\ \text{kg} \cdot 2{,}0\ \text{m/s}^2}{1{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}20.$$

b) Kun liike on tasaista, vetävän voiman $\bar{F}$ ja liikevastusten, tässä tapauksessa kitkan $\bar{F}_\mu$, summa on nolla eli $\Sigma\bar{F} = \bar{0}$. Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan $F - F_\mu = 0$.
Vetävä voima on

$$F = F_\mu = \mu mg = 0{,}2039 \cdot 1{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 2{,}0\ \text{N}.$$

Vetävä voima tekee työtä samalla teholla kuin liikevastukset muuntavat mekaanista työtä muihin energiamuotoihin esimerkiksi lämmöksi ja ääneksi. Myös pintojen kuluminen vaatii energiaa.

28. a) Laatikon liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F_\mu = ma$.
Auton kiihtyvyys on

$$a = \frac{F_\mu}{m} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g = 0,39 \cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 3,8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Vetokoukkuun vaikuttava voima on

$$F = ma = 235\ \mathrm{kg} \cdot 3,83\ \mathrm{m/s^2} \approx 900\ \mathrm{N}.$$

b) Auton pyörien ja tienpinnan välinen kitka antaa kiihtyvyyden koko systeemille.
Liikeyhtälöstä $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan skalaariyhtälö

$$F_\mu = \mu m_a g = m_{\mathrm{kok}} a.$$

Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{m_{\mathrm{kok}} a}{m_{\mathrm{a}} g} = \frac{(1150 + 170 + 65)\,\mathrm{kg} \cdot 3,83\,\mathrm{m/s^2}}{1150\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 0,47.$$

29. Veturin kiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{\frac{10}{3,6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\,\mathrm{s}} \approx 0,28\,\mathrm{m/s^2}.$$

Veturi vetää vaunua voimalla

$$F = ma + 0,005 \cdot G = ma + 0,005 \cdot mg$$

$$= 7200\ \mathrm{kg} \cdot 0,278\ \mathrm{m/s^2} + 0,005 \cdot 7200\ \mathrm{kg} \cdot 9,81\ \mathrm{m/s^2} \approx 2,4\ \mathrm{kN}.$$

30. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on

$$\frac{1}{2}mv^2 + W = mgh \text{ eli } \frac{1}{2}mv^2 + Fs = mgh.$$

Keskimääräinen liikevastusvoima on

$$F = \frac{mgh - \frac{1}{2}mv^2}{s} = \frac{1250\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 12\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 1250\,\mathrm{kg} \cdot (\frac{75}{3,6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{160\,\mathrm{m}} \approx -780\,\mathrm{N}.$$

Liikevastusvoima on noin 780 N.

31. a) Maastoautoissa pyörät (kaikki tai pareittain) voidaan lukita pyörimään samalla nopeudella. Yksi pyörä voi olla jopa ilmassa, jolloin kolme muuta vetää. Jos pyöriä ei ole lukittu ja yksikin vetävä pyörä on ilmassa tai pyörä luistaa, niin autoa eteenpäin vievä voima häviää. Nelipyörävedossa liikkeen suuntaan vaikuttava kitka on suuri.

b) Nelipyörävetoinen auto kytketään hyvällä tiellä kaksipyörävetoiseksi, koska tällöin voimansiirtojärjestelmän liikevastukset pienenevät ja polttoaineen kulutus pienenee. Maastoajoon tarkoitetussa autossa samalla akselilla olevat pyörät pyörivät samalla nopeudella. Kaarteessa ulkokaarteen puoleiset pyörät kulkevat pidemmän matkan kuin sisäkaarteen puoleiset pyörät. Kuitenkin molemmat pyörät pyörivät samalla kulmanopeudella, joten joidenkin pyörien on pakko luistaa. Joissakin autoissa myös kaikki pyörät voivat olla lukittuna pyörimään samalla nopeudella, mikä aiheuttaa myös luistoa. Kuivalla asfalttitiellä suuresta kitkasta johtuva luisto tapahtuu nykäyksittäin, joka tuntuu matkustamossa epämiellyttävänä. Joillakin maastoautoilla, varsinkin vanhoilla, on rakenteesta johtuva nopeusrajoitus nelivetoisena ajettaessa, esimerkiksi 80 km/h. Kaikkien nelipyörävetoisten autojen pyörien pyörimistä ei voi lukita eikä kaikkia nelipyörävetoisia autoja voi kytkeä kaksipyörävetoisiksi.

32. Vedessä alumiinipalaan kohdistuva noste on

$$N = 1{,}02\ \text{N} - 0{,}63\ \text{N} = 0{,}39\ \text{N}.$$

Alumiinipalan tilavuus on

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{\dfrac{0{,}39\ \text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}}{1000\ \text{kg/m}^3} = 3{,}98 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3.$$

Noste bensiinissä on

$$1{,}02\ \text{N} - 0{,}75\ \text{N} = 0{,}27\ \text{N}.$$

Bensiinin tiheys on

$$\rho = \frac{m_2}{V} = \frac{\dfrac{0{,}27\ \text{N}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}}{3{,}98 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3} \approx 690\ \text{kg/m}^3.$$

33. Olkoon x purettavan lastin massa. Laivaan kohdistuvan nosteen on oltava sama Suomenlahdella kuin Atlantilla. Saadaan yhtälö $\rho_A V_1 g = \rho_S V_2 g$. Koska tiheys on $\varrho = m/V$, tilavuudelle saadaan muoto $V = m/\varrho$. Ratkaistaan yhtälöstä

$$\rho_A \frac{m-x}{\rho} = \rho_S \frac{m}{\rho}$$

purettavan lastin massa: $\rho_A m - \rho_A x = \rho_S m$.
Massaksi saadaan

$$x=\frac{m(\rho_\mathrm{A}-\rho_\mathrm{S})}{\rho_\mathrm{A}}=\frac{12\,000\cdot 10^3\ \mathrm{kg}(1026\ \mathrm{kg/m^3}\ -\ 1004\ \mathrm{kg/m^3})}{1026\ \mathrm{kg/m^3}}$$
$$\approx\ 260\,000\ \mathrm{kg}\ .$$

34. Liikeyhtälö on $\Sigma\bar{F}=m\bar{a}$ eli $\bar{G}+\bar{N}=m\bar{a}$. Kun suunta alaspäin valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $mg - N = ma$. Koska massa on $m = \varrho V$ ja noste $N = \varrho Vg$, saadaan yhtälö

$$\rho_\mathrm{A}Vg-\rho_\mathrm{v}Vg=\rho_\mathrm{A}Va\,,$$

josta kiihtyvyydeksi saadaan

$$a=\frac{\rho_\mathrm{A}Vg-\rho_\mathrm{v}Vg}{\rho_\mathrm{A}V}=\frac{\rho_\mathrm{A}g-\rho_\mathrm{v}g}{\rho_\mathrm{A}}=\frac{(2{,}70\ \mathrm{g/cm^3}-1{,}00\ \mathrm{g/cm^3})\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{2{,}70\ \mathrm{g/cm^3}}$$
$$\approx 6{,}2\ \mathrm{m/s^2}.$$

Veden virtausvastus kasvaa nopeuden kasvaessa, joten kiihtyvyys pienenee. Jos vesi on tarpeeksi syvä, saavutetaan lopulta tilanne, jossa noste ja virtausvastus ovat yhdessä yhtä suuria kuin kappaleen paino. Tällöin kiihtyvyys on nolla ja kappaleen nopeus vakio.

35. a) Uponnut laiva syrjäyttää vähemmän vettä kuin kelluva laiva, joten veden pinta laskee.

b) Syvemmällä vedessä hydrostaattinen paine on suurempi. Tästä syystä pallon tilavuus pienenee. Syvällä noste on siis pienempi, koska se riippuu pallon tilavuudesta. Ilmapallo uppoaa, koska noste pienenee mutta painovoima pysyy samana.

36. Pallon liikeyhtälö $\Sigma\bar{F}=M\bar{a}$ eli $\bar{N}+\bar{G}=M\bar{a}$, jossa M on kokonaismassa ja N noste. Kun suunta ylöspäin valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$N - Mg = Ma.$$

Kun pallo laskeutuu, on $N=Mg-Ma_\mathrm{alas}$. Jotta pallo nousisi ylöspäin, massaa on kevennettävä määrällä m. Saadaan yhtälö

$$(M-m)a_\mathrm{ylös}=N-(M-m)g \text{ eli}$$
$$Ma_\mathrm{ylös}-ma_\mathrm{ylös}=M(g-a_\mathrm{alas})-Mg+mg\,.$$

Massaksi m saadaan

$$m=\frac{Ma_\mathrm{ylös}+Ma_\mathrm{alas}}{g+a_\mathrm{ylös}}=\frac{1210\ \mathrm{kg}(0{,}03\ \mathrm{m/s^2}+0{,}2\ \mathrm{m/s^2})}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}+0{,}03\ \mathrm{m/s^2}}\approx 30\ \mathrm{kg}.$$

37. Koska jokaisen esineen paino $G = mg$ ilmassa tiedetään, voidaan laskea jokaisen esineen massa yhtälöstä $m = \frac{G}{g}$.

esine	1	2	3	4	5	6
m/g	12,2	26,5	39,8	54,0	70,3	80,5

Koska esineet punnittiin sekä ilmassa että vedessä, saadaan noste erotuksesta $N = G_{\text{ilma}} - G_{\text{vesi}}$. Noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliainemäärän paino. Syrjäytyneen veden paino on

$$G_{\text{vesi}} = N = m_{\text{vesi}} g = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{vesi}} g = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{esine}} g.$$

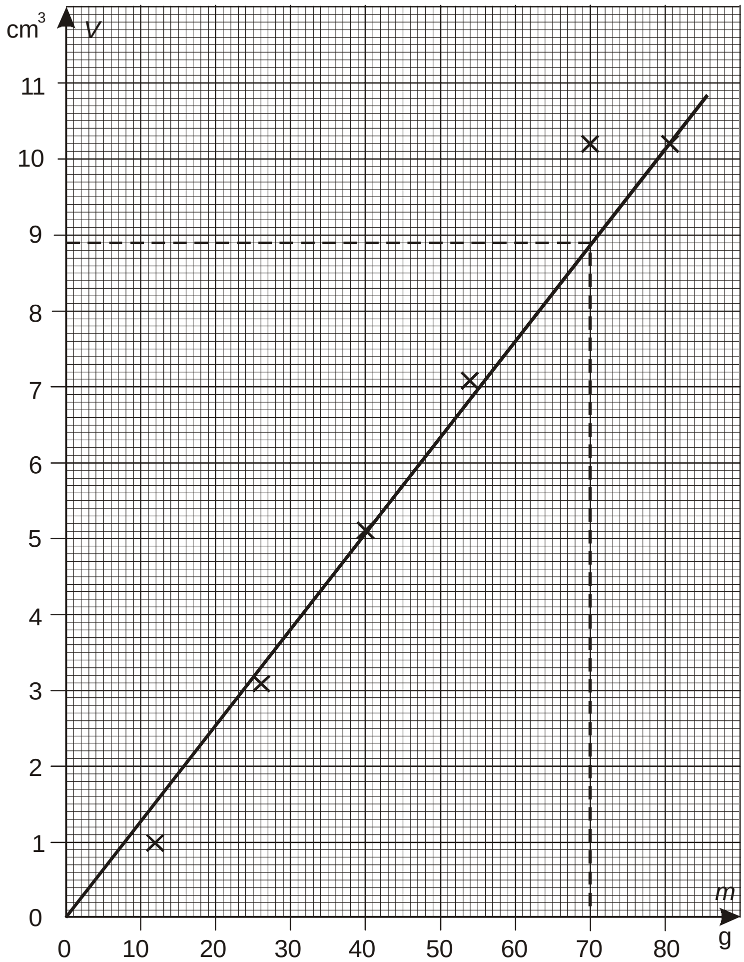
Esineen tilavuus on

$$V_{\text{esine}} = \frac{N}{\rho_{\text{vesi}} g}.$$

Lasketaan nosteen ja tilavuuden arvot ja kirjoitetaan ne taulukkoon.

esine	1	2	3	4	5	6
noste (N)	0,01	0,03	0,05	0,07	0,10	0,10
tilavuus (cm^3)	1,0	3,1	5,1	7,1	10,2	10,2

Piirretään taulukkotietojen perusteella kuvaaja (m, V)-koordinaatistoon.



Kuvaajaksi saadun suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta V}{\Delta m} = \frac{V_2 - V_1}{m_2 - m_1} = \frac{8{,}9\,\text{cm}^3 - 0\,\text{cm}^3}{70\,\text{g} - 0\,\text{g}} \approx 0{,}1271\,\text{cm}^3/\text{g}.$$

Tiheyden yhtälöstä $\rho = \frac{m}{V}$ saadaan tilavuudelle yhtälö

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot m.$$

Verrataan tätä yhtälöä origon kautta kulkevan suoran yhtälöön, joka on muotoa $y = kx$.

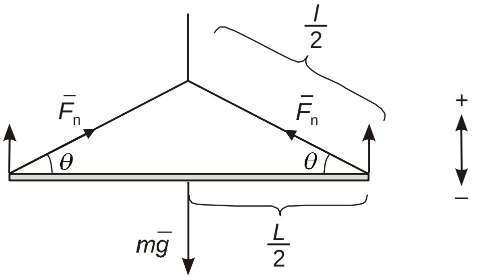
Huomataan, että kulmakerroin $k = \frac{1}{\rho}$.

Tiheydeksi saadaan silloin

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}1271\,\text{cm}^3/\text{g}} \approx 7{,}9\,\text{g/cm}^3.$$

38. Kun nosto suoritetaan mahdollisimman tasaisesti, kiihtyvyys on likimain nolla. Tällöin tasapainoehto on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a} = \overline{0}$. Kun suunta ylöspäin on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $2F_\text{n}\sin\theta - mg = 0$. Ratkaistaan kulma θ:

$$\sin\theta = \frac{mg}{2F_\text{n}} = \frac{1340\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2 \cdot 16\,000\ \text{N}},\ \text{josta kulma } \theta \approx 24{,}3^\circ.$$



Kuvion mukaan on

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}L}{\frac{1}{2}l},$$

josta vaijerin pituudeksi saadaan

$$l = \frac{L}{\cos\theta} = \frac{5{,}4\,\text{m}}{\cos 24{,}3^\circ} \approx 5{,}92\,\text{m}.$$

Vaijerin pituuden täytyy olla vähintään 6,0 m.

39. a) Kitkavoima on

$$F_\mu = \mu N = \mu(F_y + G_y) = \mu(F\sin\alpha + G\cos\alpha)$$

$$= 0{,}15 \cdot (45\,\text{N} \cdot \sin 22° + 4{,}5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 22°) \approx 8{,}7\,\text{N}.$$

b) Liikeyhtälö tason suunnassa on

$$\Sigma\overline{F} = m\overline{a} \text{ eli } \overline{F}_x + \overline{F}_\mu + \overline{G}_x = m\overline{a}.$$

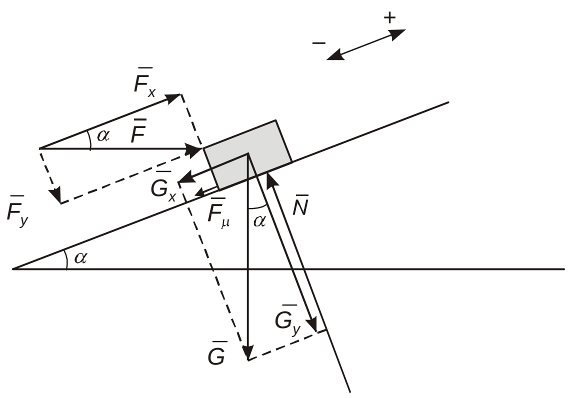
Kun valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$F\cos a - F_\mu - G\sin a = ma.$$

Kiihtyvyys on

$$a = \frac{F\cos\alpha - F_\mu - mg\sin\alpha}{m}$$

$$= \frac{45\,\text{N}\cos 22° - 8{,}67\,\text{N} - 4{,}5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 22°}{4{,}5\,\text{kg}} \approx 3{,}7\ \text{m/s}^2.$$



40. Koska köyden jännitysvoima on kaikkialla sama, voidaan merkitä

$$|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T.$$

Kappaleen m_1 liikeyhtälö on

$$\sum\overline{F} = m_1\overline{a} \text{ eli } \overline{T}_1 + \overline{G}_{1x} + \overline{F}_{\mu 1} = m_1\overline{a}.$$

Kun valitaan suunta tasosta ylöspäin positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$T - G_{1x} - F_{\mu 1} = m_1 a \text{ eli } T - m_1 g\sin 30^\circ - \mu N_1 = m_1 a$$

ja edelleen

$$T - m_1 g\sin 30^\circ - \mu m_1 g\cos 30^\circ = m_1 a\,.$$

Kappaleen m_2 liikeyhtälö on

$$\sum\overline{F} = m_2\overline{a} \text{ eli } \overline{T}_2 + \overline{F}_{\mu 2} + \overline{G}_{2x} = m_2\overline{a}.$$

Kun valitaan suunta tasosta ylöspäin positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$T + F_{\mu 2} - G_{2x} = -m_2 a \text{ eli } T + \mu N_2 - m_2 g \sin 60^\circ = -m_2 a$$

ja edelleen

$$T + \mu m_2 g \cos 60^\circ - m_2 g \sin 60^\circ = -m_2 a \ .$$

Kirjoitetaan yhtälöt allekkain:

$$T - m_1 g \sin 30^\circ - \mu m_1 g \cos 30^\circ = m_1 a$$

$$T + \mu m_2 g \cos 60^\circ - m_2 g \sin 60^\circ = -m_2 a \, .$$

Kun alempi yhtälö kerrotaan luvulla –1 ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, saadaan

$$\begin{aligned} &-m_1 g \sin 30^\circ - \mu m_1 g \cos 30^\circ - \mu m_2 g \cos 60^\circ + m_2 g \sin 60^\circ \\ &= a(m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Yhtälöstä saadaan systeemin kiihtyvyydeksi

$$\begin{aligned} a &= \frac{-m_1 g \sin 30^\circ - \mu m_1 g \cos 30^\circ - \mu m_2 g \cos 60^\circ + m_2 g \sin 60^\circ}{m_1 + m_2} \\ &\approx 2{,}7 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

41. a) Koska lumilautailija on paikallaan, tasapainoehto on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$$G_x - F_\mu = 0 \text{ eli } G \sin\alpha - \mu_0 N = 0 \, .$$

Lähtökitkakerroin on

$$\mu_0 = \frac{G \sin\alpha}{N} = \frac{G \sin\alpha}{G_y} = \frac{G \sin\alpha}{G \cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 7{,}0^\circ \approx 0{,}12.$$

b) Liukukitkakerroin on pienempi kuin lepokitkakerroin. Tästä johtuen liukukitka $\overline{F}_{\mu(\text{liuku})}$ on pienempi kuin lepokitka ja a-kohdassa laskettu painon pinnan suuntainen komponentti $\overline{G}_x$. Liikeyhtälö saa muodon

$$\Sigma\overline{F} = \overline{G}_x - \overline{F}_{\mu(\text{liuku})} = m\overline{a} \ ,$$

jossa kiihtyvyys $\overline{a}$ ei ole kuitenkaan vakio, koska ilmanvastus kasvaa nopeuden kasvaessa. Lopulta voimien summa on nolla. Tällöin lautailijan nopeus on vakio, jos rinteen kaltevuus ei muutu tai jos lautailija ei muuta ilmanvastusta esimerkiksi menemällä kyykkyyn.

42. a) Hiihtäjän liikeyhtälö rinteen suunnassa on $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}_x$ eli $\bar{G}_x + \bar{F}_\mu = m\bar{a}_x$. Valitaan suunta rinnettä alaspäin positiiviseksi. Saadaan skalaariyhtälö $G_x - F_\mu = ma_x$. Ratkaistaan yhtälöstä hiihtäjän kiihtyvyys:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{m(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)}{m} \\ &= g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha \\ &= 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 25^\circ - 0{,}12 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 25^\circ \approx 3{,}1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned}$$

b) Yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$ saadaan ajaksi

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,\text{m}}{3{,}08\,\text{m/s}^2}} \approx 4{,}0\,\text{s}.$$

c) Massalla ei ole merkitystä tätä mallia käytettäessä, koska sen tunnus *m* supistuu laskuista pois.

43. a) Kaikilla vaunuilla on yhtä suuri nopeus kohdassa A, koska jokaisen mekaaninen energia säilyy.

b) Suurin kiihtyvyys on vaunulla 2. Tämä johtuu siitä, että kohdassa A vaunun 2 painon tason suuntainen komponentti on suurempi kuin muilla vaunuilla.

c) Pisteen A ohittaa ensimmäisenä vaunu 3, sillä vaunun 3 keskinopeus on suurin. Kun vaunut lähtevät valumaan alas, vaunun 3 kiihtyvyys on alussa suurin.

44. Koska hiihtäjä liukuu vakionopeudella, häneen vaikuttavien voimien summa on nolla:

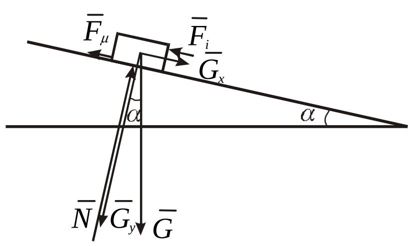
$$\Sigma \bar{F} = \bar{0} \text{ eli } \bar{F}_\text{i} + \bar{F}_\mu + \bar{G}_x = \bar{0}.$$

Valitaan suunta alaspäin positiiviseksi, jolloin

$$-F_\text{i} - F_\mu + G_x = 0$$

ja ilmanvastus on

$$F_\text{i} = G_x - F_\mu = mg\sin\alpha - \mu N.$$



Hiihtäjän liikeyhtälö *y*-suunnassa on

$$\Sigma \bar{F}_y = \bar{0} \text{ eli } \bar{N} + \bar{G}_y = \bar{0}.$$

Valitaan suunta ylöspäin positiiviseksi. Tällöin on

$$N = G_y = mg\cos\alpha .$$

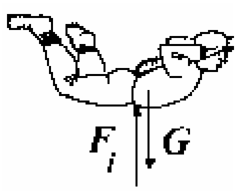
Sijoitetaan tukivoima ilmanvastuksen yhtälöön, jolloin saadaan

$$F_{\mathrm{i}} = mg\sin\alpha - \mu N = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$
$$= 72\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}(\sin 8{,}0° - 0{,}12\cdot\cos 8{,}0°) \approx 14{,}4\,\mathrm{N}.$$

Kuvaajasta saadaan tätä ilmanvastusta vastaava nopeus, joka on 14 m/s.

45. Aluksi liike on tasaisesti kiihtyvää, kunnes vauhdin kasvaessa ilmanvastus pienentää kiihtyvyyden nollaan noin 13 sekunnissa. Tämän jälkeen vauhti on vakio, kunnes noin 19 sekunnin kohdalla varjo alkaa avautua. Varjon avauduttua kokonaan vauhti pienenee arvoon 4 m/s. 30 s:n jälkeen vauhti pysyy vakiona, kunnes hetkellä 210 s hyppääjä tulee maahan.
Nopeuden ollessa vakio hyppääjän liikeyhtälö on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_{\mathrm{i}} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylöspäin on positiivinen, ilmanvastus F_{i} on yhtä suuri kuin hyppääjän paino G varusteineen (olipa varjo auki tai ei). Ilmanvastus on

$$F_{\mathrm{i}} = mg = 95\ \mathrm{kg}\ \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \approx 930\ \mathrm{N}.$$



Kuvassa on laskuvarjohyppääjä ennen varjon avautumista ja hyppääjään kohdistuvat voimat, kun nopeus on vakio.

Hyppääjän kiihtyvyys hetkellä 10 s saadaan piirtämällä kuvaajalle tangentti ja laskemalla sen fysikaalinen kulmakerroin: kiihtyvyys on noin 1,4 m/s^2.
Hyppykorkeudeksi saadaan fysikaalisen pinta-alan avulla noin 1800 m.

46. Kitkattomassa tapauksessa liikeyhtälö tason suunnassa on $\Sigma\overline{F}_x = m\overline{a}_1$ ja skalaariyhtälö $G_x = ma_1$, kun liikkeen suunta on positiivinen.

Kiihtyvyydeksi saadaan $a_1 = \dfrac{G_x}{m}$.

Kiihtyvässä liikkeessä kappaleen kulkema matka on

$$s = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{G_x}{2m}t_1^2 .$$

Kun kitka otetaan huomioon, liikeyhtälö tason suunnassa on $\Sigma\overline{F}_x = m\overline{a}_1$ eli

$$\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = m\overline{a}_2 .$$

Kun liikkeen suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$$G_x - F_\mu = ma_2 .$$

Nyt matka tasoa alaspäin on

$$s = \frac{G_x - F_\mu}{2m} t_2^2 .$$

Jälkimmäiseen tapaukseen kuluu kaksinkertainen aika eli $t_2 = 2t_1$, ja saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}\frac{G_x}{m} t_1^2 = \frac{1}{2}\frac{G_x - F_\mu}{m}(2t_1)^2 .$$

Ratkaistaan yhtälöstä kitkavoima F_μ:

$$G_x = 4G_x - 4F_\mu \text{ ja } F_\mu = \frac{3}{4}G_x = \frac{3}{4}mg\sin\alpha .$$

Toisaalta kitka on

$$F_\mu = \mu N = \mu mg\cos\alpha .$$

Kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{F_\mu}{mg\cos\alpha} = \frac{3\sin\alpha}{4\cos\alpha} = \frac{3\sin 35^\circ}{4\cos 35^\circ} \approx 0{,}53.$$

47. Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$\frac{1}{2}kA = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 .$$

Koska kappaleen liike-energia on puolet kappaleen potentiaalienergiasta, saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}kA = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 .$$

Kappaleen poikkeamaksi saadaan

$$x = A\sqrt{\frac{2}{3}} .$$

Koska kappaleen liike-energia on puolet kappaleen potentiaalienergiasta, on myös voimassa yhtälö

$$\frac{1}{2}kA = \frac{1}{2}mv^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mv^2 .$$

Kappaleen nopeudeksi saadaan

$$v = A\sqrt{\frac{k}{3m}} .$$

48. a) Osa auton liike-energiasta muuntuu jousen energiaksi ja osa kitkatyöhön jousen puristumismatkalla x. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan eristämättömässä systeemissä on

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2 - F_\mu x = 0.$$

Saadaan toisen asteen yhtälö $kx^2 + 2F_\mu x - mv^2 = 0$ eli

$$15\ 000\,\mathrm{N/m}\cdot x^2 + 2\cdot 250\,\mathrm{N}\cdot x - 80\,\mathrm{kg}\cdot(1{,}0\,\mathrm{m/s})^2 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan jousen kokoonpuristumaksi x = 5,824 cm ≈ 5,8 cm (tai x ≈ −9,1 cm; negatiivinen arvo ei kelpaa, sillä se tarkoittaisi, että kitka lisäisi systeemin mekaanista energiaa törmäyksen aikana).

b) Hidastuvuus on suurin, kun jousi on törmäyksessä puristunut ääriasentoonsa. Tällöin suurin jousen voima on
$F_{\max} = -kx = -15\ 000\ \mathrm{N/m}\ \cdot 0{,}05824\ \mathrm{m} \approx -873{,}6\ \mathrm{N}$.
Newtonin II lain mukaan on $F_{\max} = ma_{\max}$.
Suurimmaksi kiihtyvyydeksi saadaan

$$a_{\max} = \frac{-873{,}6\,\mathrm{N} - 250\,\mathrm{N}}{80\,\mathrm{kg}} \approx -14\,\mathrm{m/s}.$$

Suurin hidastuvuus on 14 $\mathrm{m/s^2}$.

c) Kitkan tekemä työ muuntaa harmoniseen jouseen varastoituneen energian muihin energiamuotoihin: yhtälöstä $\frac{1}{2}kx^2 = F_\mu s$ auton liikkuma matka törmäyksen jälkeen on

$$s = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{F_\mu} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 15\ 000\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot(0{,}05824\,\mathrm{m})^2}{250\,\mathrm{N}} \approx 0{,}10176\ \mathrm{m}.$$

Vähennetään auton liikkumasta matkasta jousen puristuma:

10,176 cm − 5,824 cm ≈ 4,4 cm.

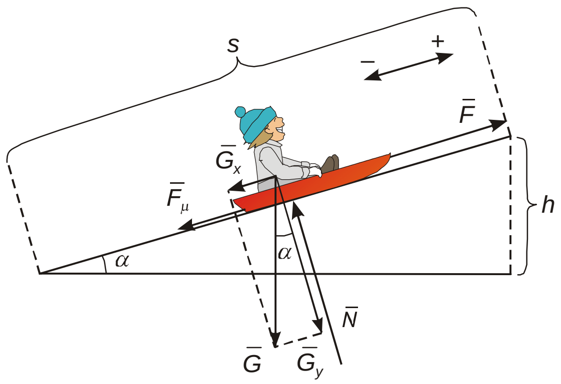
Auton puskuri jää 4,4 cm etäisyydelle seinästä.

49. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan eristämättömässä systeemissä on $E_\mathrm{p}^\mathrm{a} + W = E_\mathrm{p}^\mathrm{l}$, jolloin koiran tekemä työ on

$$W_\mathrm{koira} = \Delta E_\mathrm{p} + W_\mathrm{vast} = mgh + F_\mu s = mgh + \mu Ns$$

$$= mgh + \mu mg\cos\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = mgh(1 + \mu\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha})$$

$$= 18\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 8{,}0\,\mathrm{m}\cdot(1 + 0{,}20\cdot\frac{\cos 19°}{\sin 19°}) \approx 2{,}2\,\mathrm{kJ}.$$



b) Reitistä riippumatta potentiaalienergian muutos on sama. Kitkan voittamiseksi tehty työ kasvaa loivempia reittejä valittaessa, koska matka kasvaa. Kitkavoima pysyy kuitenkin samana.

50. Junan nopeus on

$$v = \frac{s}{t} = \frac{210\,\text{km}}{3{,}0\,\text{h}} = 70\,\text{km/h}\,.$$

Tehon yhtälöstä $P = Fv$ junan kulkua vastustava keskimääräinen voima on

$$F = \frac{P}{v} = \frac{750\,\text{kW}}{\frac{70}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 39\,\text{kN}.$$

51. a) Jos käytössä olisi oma pienoisvoimalaitos, sähköenergian käytöstä aiheutuvia laskuja ei tarvitsisi maksaa ulkopuoliselle energiantoimittajalle. Jos kotitaloudet tuottaisivat itselleen riittävästi sähköenergiaa, sitä riittäisi paremmin teollisuuden tarpeisiin ja suurvoimalaitosten lisärakentamiselta voitaisiin välttyä.

b) Vesivoimalaitoksen teho on

$$P = \frac{\eta E_\text{p}}{t} = \frac{\eta mgh}{t} = \frac{\eta \rho Vgh}{t},$$

josta pudotuskorkeudeksi saadaan

$$h = \frac{P}{\frac{\eta \rho Vg}{t}} = \frac{12 \cdot 10^6\,\text{W}}{\frac{0{,}80 \cdot 1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 140\,\text{m}^3 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{1{,}0\,\text{s}}} \approx 11\,\text{m}.$$

52. a) Joulukinkku paistetaan yleensä jouluaattona. Uunin teho on suuri ja samaan aikaan on käytössä monta uunia. Samanaikaisesti käytetään myös useita sähkösaunoja. Lisäksi talviaikaan sähköenergian kulutus on mm. sähkölämmityksen takia huipussaan. Myös jouluvalaistus lisää sähköenergian kulutusta.

b) Ruuanvalmistus tapahtuu päivittäin samoina kellonaikoina, jolloin tarvitaan paljon sähköenergiaa. Kylmä sää lisää aina sähkönkulutusta siellä, missä sähköenergiaa käytetään lämmitykseen. Päivisin sähköenergiaa tarvitaan enemmän kuin öisin.

c) Tuulivoimalaitoksen teho on $P = \eta \frac{1}{2} \rho \pi r^2 v^3$, josta tuulivoimalaitoksen siiven pituudeksi saadaan

$$r = \sqrt{\frac{P}{\eta \frac{1}{2} \rho \pi v^3}} = \sqrt{\frac{86 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}}}{0{,}31 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot \left(6{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3}} \approx 22\,\text{m}.$$

53. a) Nopeuden pystykomponentti on $v_y = 3\,\text{m/s} \cdot \sin 5° = 0{,}3\,\text{m/s}$.

b) Jos kiipeämistyö on *mgh* ja kitkatyö 1,5*mgh*, kokonaistyö on

mgh + 1,5*mgh* = 2,5*mgh*.

Juoksuteho on

$$P = \frac{2{,}5mgh}{t} = \frac{2{,}5 \cdot 80\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}261\,\text{m}}{1{,}0\,\text{s}} \approx 500\,\text{W}.$$

c) Koska hyötysuhde on $\frac{P_{\text{juoksu}}}{P_{\text{kok}}} = 0{,}40$, kokonaisteho on

$$P_{\text{kok}} = \frac{600\,\text{W}}{0{,}40} = 1500\,\text{W}.$$

Hukkateho on 1500 W – 600W = 900 W.

d) Lämpöenergiaa kuluu *E* = *Pt* = 900W · 60s = 54 kJ. Haihtuva hikimäärä saadaan veden ominaishöyrystymislämmön avulla. Hien massa on

$$m = \frac{E}{r} = \frac{54\,\text{kJ}}{2260\,\text{kJ/kg}} \approx 24\,\text{g}.$$

54. Impulssiperiaatteesta $\bar{F}\Delta t = m\Delta\bar{v}$ saadaan nopeuden muutokseksi

$$\Delta v = \frac{Ft}{m} = \frac{20\,\text{N} \cdot 0{,}50\,\text{s}}{5{,}0\,\text{kg}} = 2{,}0\,\text{m/s}.$$

Nopeus on

$$v = \sqrt{v_0^2 + (\Delta v)^2} = \sqrt{(3{,}0\,\text{m/s})^2 + (2{,}0\,\text{m/s})^2} \approx 3{,}6\,\text{m/s}.$$

Nopeuden suunta saadaan yhtälöstä

$$\tan\alpha = \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{2{,}0\,\text{m/s}}{3{,}0\,\text{m/s}}, \text{ josta } \alpha \approx 34°.$$

Nopeus on 3,6 m/s ja nopeuden suunta poikkeaa 34° alkuperäisestä liikesuunnasta.

55. Liikemäärä säilyy törmäyksessä eli $m_t\overline{v}_t + m_a\overline{v}_a = \overline{0}$. Kun nopeamman auton suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u\,.$$

Autojen törmäyksen jälkeiseksi nopeudeksi saadaan

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{18\ 000\,\text{kg}\cdot\frac{54}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}} + 12\ 500\,\text{kg}\cdot\left(-\frac{108}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{18\ 000\,\text{kg} + 12\ 500\,\text{kg}}$$

$$= -3,4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx -12\ \text{km/h}.$$

Nopeus on noin 12 km/h nopeamman auton liikkeen suuntaan.

56. a) Oletetaan, että molemmissa autoissa on matkustaja, jonka massa on m. Liikemäärän säilymisestä johtuen kevyen auton nopeuden muutos törmäyksessä on suurempi kuin raskaan auton. Näin ollen kevyessä autossa mukana olevan matkustajan liikemäärän muutos Δp on suurempi kuin raskaassa autossa ja siksi impulssi $I = \Delta p,$ joka aiheuttaa matkustajan liikemäärän muutoksen, on suurempi kevyemmässä autossa. Koska voiman F vaikutusaika Δt on sama molemmissa autoissa, kevyemmässä autossa matkustajaan vaikuttaa suurempi voima (esim. turvavyön voima), joka aiheuttaa pahempia ruhjeita. Koska $F\Delta t = m\Delta v$ eli $F = \dfrac{m\Delta v}{\Delta t}$, voima on suoraan verrannollinen nopeuden muutokseen ja kääntäen verrannollinen voiman vaikutusaikaan. Lisäksi raskaat autot ovat rakenteeltaan vahvempia kuin kevyet autot, ja siksi matkustajat ovat paremmin suojattuja.

b) Jos turvavyötä ei ole, matkustaja jatkavuuden lain mukaan jatkaa liiketilaansa ja törmää edessään oleviin esteisiin. Tällaisessa törmäyksessä pysäyttävä voima kohdistuu usein pienelle alueelle, jolloin syntyy vammoja. Lisäksi törmäyksen vaikutusaika on pieni, joten pysäyttävä voima on suuri. Turvavyötä käytettäessä vyö jakaa voiman F vaikutuksen laajemmalle alueelle A, jolloin kehoon voiman vaikutuskohdassa kohdistuva paine $p = \dfrac{F}{A}$ pienenee. Lisäksi turvavyöt joustavat, mikä pidentää voiman vaikutusaikaa ja siten voima pienenee. Nämä molemmat tekijät vähentävät vammoja. Matkustajan törmätessä turvatyynyyn voima jakautuu laajalle alueelle, jolloin kehoon kohdistuva paine tyynyn kohdalla jää pieneksi. Myös turvatyynyt joustavat. Molemmat seikat vähentävät vammautumisriskiä.

57. Oletetaan, että liikemäärä säilyy eli $m_\text{t}\overline{v}_\text{t} + m_\text{a}\overline{v}_\text{a} = \overline{0}$. Kun tykin liikesuunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $m_\text{t}v_\text{t} - m_\text{a}v_\text{a} = 0$.
Tykin lähtönopeus x-suunnassa heti laukaisun jälkeen on

$$v_t = \frac{m_a}{m_t} v_a = \frac{230\,\text{kg}}{46\ 000\,\text{kg}} \cdot 470\,\text{m/s} \ = 2,350\,\text{m/s}.$$

Oletetaan vastusvoimat pieniksi. Tykin liike-energia muuntuu tykin painopisteen noustessa tykin potentiaalienergiaksi eli

$$\frac{1}{2} m_t v^2 = m_t g h\,.$$

Tykin painopisteen nousukorkeus on

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2,350\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 0,281\,\text{m} \approx 28\,\text{cm}.$$